* تتضمن "التمرينات متدرجة الصعوبة" أسئلة مناسبة لمدى واسع من القدرات. وصُمِّمَت الأسئلة بشكل يجعل الطلبة يستخدمون التفكير المنطقي الاستدلالي والاستقرائي لحل المشكلات الرياضية. (ويمكن أن يختار المعلمون مسائل مختلفة للطلبة من ذوي القدرات المختلفة).

* إن "الرياضيات الممتعة" أو "استقصاء الرياضيات" والموجودة في نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) مخصصة لغرس وتنمية مهارات التفكير. وستعرض أيضًا هذه الأنشطة بعض القضايا الوطنية ذات الصلة على الطلبة.

* وتوجد ورقة للمراجعة في نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) حتى يتمكن الطلبة من قياس مستوى كفايتهم باستمرار. ويجب أن يكون جميع الطلبة قادرين على إجابة الأسئلة في القسم (أ) بينما يستطيع الطلبة متوسطو القدرة من التعامل مع الفقرات في القسم (ب). أما الطلبة ذوي القدرة الأعلى فيوفر لهم القسم (جـ) التحدي المطلوب.

وبالإضافة للملامح الرئيسة لكل فصل. استخدمت امتحانات تقويمية في الكتاب كمادة للمراجعة العامة لتساعد على إعداد الطلبة للامتحانات. وركزت خمسة فصول في كتاب الصف الثاني من مرحلة التعليم الثانوي على المراجعة. بينما يحتوي كتاب الصف الثالث من مرحلة التعليم الثانوي على 15 قسمًا في الفصل الثامن للمراجعة. تتراوح بين الحساب والجبر إلى التحويل وحل المشكلات.

تُعَرَّف في جميع أنحاء هذه السلسلة:
* مهارات وعمليات التفكير
* تقانة المعلومات
* التربية الوطنية
عن طريق الأيقونات التالية:

لتطبيق مهارات التفكير

لتطبيق تقانة المعلومات

لرسائل التربية الوطنية

وُدعِّمَتْ هذه السلسلة من الكتب بمصادر لجميع المعلمين والطلاب. متوافرة ومتاحة لدى الموقع [http//www.teol. com.sg]

وتشير الأيقونة التالية والموجودة في كل جزء من الكتاب إلى وجود مصادر على شبكة المعلومات الدولية لها صلة بالموضوع قيد الدراسة.

مواقع شبكة المعلومات الدولية المتعلقة بالمتن هي أيضًا متوافرة ومتاحة لدى الموقع ويُستدل عليه بالأيقونة التالية

erNET

ونأمل أن تساعد المادة المقدمة في السلسلة الطلبة على تقدير أهمية وقدرة الرياضيات في نشاطاتهم اليومية. وربما في مهنتهم المستقبلية. وأن يستمتعوا باستخدام سلسلة رياضيات التعليم الأساسي والثانوي.

Contents

المحتويات

تبسيط الكسور الجبرية التي لا تتضمن تحليلًا	1
تبسيط الكسور الجبرية التي تتضمن تحليلًا	1
ضرب وقسمة الكسور الجبرية	3
جمع وطرح الكسور الجبرية ذات المقامات العددية	5
جمع وطرح الكسور الجبرية ذات المقامات الجبرية	9
المعادلات التي تتضمن كسورًا جبرية	12
المعالجات بالصيغ الرياضية	17
المتتابعات والصيغ الرياضية	20
الحلول البيانية للمعادلات التربيعية	23
الرسوم البيانية الأسية	33
تقدير ميل الرسومات البيانية غير الخطية	43
ملخص	47
استقصاء الرياضيات (أعداد فيبوناتشي)	59
ورقة المراجعة (1)	61
	62
المتباينات على خط الأعداد	64
حل المتباينات عن طريق الجمع أو الطرح	65
حل المتباينات عن طريق الضرب أو القسمة	66
حل المتباينات التى تتضمن أكثر من عملية واحدة	68
حل متباينتين أو أكثر فى مجهول واحد آنيًا	70
المزيد من التدريبات على المتباينات	72
المحل الهندسي	75
المحال الهندسية فى بعدين	77
تقاطع المحال الهندسية	79
محال هندسية تتضمن مساحات	81
المحال الهندسية والمتباينات	88
مسائل فى حساب المثلثات تتضمن ثلاثة أبعاد	91
ملخص	95
استقصاء الرياضيات (النهر الاصطناعي)	109
ورقة المراجعة (2)	111
	112
الانتقال	114
الانعكاس (مراجعة)	115
الدوران	121
التكبير	128
الانسحاب	135
التمديد	144
التحويلات الهندسية المركبة	151
ملخص	156
رياضيات ممتعة (انسحاب)	162
ورقة المراجعة (3)	163
	164

166
167 فضاء العينة
168 الاحتمال البسيط
173 مخطط الأحداث الممكنة
177 شجرة الاحتمالات
185 مزيد من الاحتمالات
188 المدرج التكراري ذو الفترات غير المتساوية، وكثافة التكرار
194 ملخص
195 استقصاء الرياضيات (الشرطي ودوريته العشوائية)
195 ورقة المراجعة (4)

197

الرموز الرياضية

Mathematical Notation

1- رموز المجموعة

$\ni$	: ينتمي إلى
$\not\ni$	: لا ينتمي إلى
{س$_1$، س$_2$....}	: مجموعة من العناصر س$_1$، س$_2$، .....
{س: ....}	: مجموعة كل س حيث
ن (أ)	: عدد العناصر في المجموعة (أ)
ø	: المجموعة الخالية
ع	: المجموعة الشاملة
$\bar{أ}$	: مكملة المجموعة أ
W	: مجموعة الأعداد الكلية {0، 1، 2، 3...}
Z	: مجموعة الأعداد الصحيحة {0، ±1، ±2، ±3..}
Z^+	: مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة {1، 2، 3...}
R	: مجموعة الأعداد الحقيقية
Q	: مجموعة الأعداد النسبية
$\supseteq$	: مجموعة جزئية من مجموعة أخرى
$\supset$	: مجموعة جزئية فعلية
$\not\supseteq$	: ليست مجموعة جزئية من
$\not\supset$	: ليست مجموعة جزئية فعلية
$\cup$	: اتحاد المجموعات
$\cap$	: تقاطع المجموعات
[أ، ب]	: فترة مغلقة تعني {س $\ni$ ح : أ $\geq$ س $\geq$ ب}
[أ، ب[	: فترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة تعني {س $\ni$ ح : أ $\geq$ س > ب}
]أ، ب]	: تعني أن { س $\ni$ ح : أ > س $\geq$ ب}
]أ، ب[	: فترة مفتوحة {س $\ni$ ح : أ > س >ب}

2- رموز الربط (المقارنة)

=	: تساوي
$\neq$	: لا تساوي
$\equiv$	: تكافئ
$\approx$	: تقريباً:
$\propto$	: يتناسب
>	: أقل من
$\geq$	: أقل من أو يساوي
$\not<$	: ليست أكبر من
<	: أكبر من
$\leq$	: أكبر من أو يساوي
$\not>$	: ليست أقل من
∞	: ما لا نهاية

3- العمليات

أ +ب	: أ زائد ب
أ -ب	: أ ناقص ب
أ ×ب، أب، أ.ب	: تعني أ مضروب في ب
$\frac{أ}{ب}$، أ ÷ ب، أ/ب	: أ مقسوم على ب
أ : ب	: نسبة أ إلى ب
$\sqrt{}$	: الجذر التربيعي الموجب للعدد الحقيقي أ حيث أ > 0
|أ|	: القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أ

4- نظام الوحدات العالمية SI Units

يستخدم نظام الوحدات العالمية سبع وحدات أساسية، وتُشتق جميع الوحدات الأخرى من هذه الوحدات الأساسية بضرب أو قسمة وحدة في وحدة أخرى.

الكمية الفيزيائية	اسم الوحدة الأساسية	رمز الوحدة
طول	متر	م
كتلة	كيلو جرام	كجم
زمن	الثانية	ث
التيار الكهربائي	أمبير	أ م
درجات حرارة الترمومتر	كيلفين	ك
شدة الإضاءة	شمعة	سـ
كمية المادة	مول	مل

تستخدم الوحدات الثلاث الأخيرة أساسًا في الأعمال العلمية المتخصصة، أما في الأغراض الشائعة فيتم قياس الحرارة على مقياس سلسيوس (المئوي). وتكون فواصل الحرارة على مقياسي كلفين وسلسيوس متشابهة.

يمكن الحصول على مضاعفات واختصارات الوحدات الأساسية عن طريق إضافة البادئة المتفق عليها إلي الوحدة المستخدمة. نضيف عادة البادئة إلى الوحدة بحيث يظل الجزء العددي من الكمية ما بين 0.1 ، 1000 (أي أننا لا نصغر أو نكبر العدد بدرجة كبيرة) والاستثناء هو الكيلو جرام الذي يعتبر وحدة أساسية في حد ذاته.

عامل الضرب	البادئة	الرمز
10^{-9}	نانو	ن
10^{-6}	ميكرو	µ
10^{-3}	ملي	م
10^{-2}	سنتي	س
10^{-1}	ديسي	ى
10^{1}	ديسا	دا
10^{2}	هكتو	هـ
10^{3}	كيلو	ك
10^{6}	ميجا	م
10^{9}	جيجا	ج

يتم عرض القيم العددية في النظام الدولي للوحدات كما يلي:

1,000	تكتب 1000
12,005	تكتب 12005
1,000,500	تكتب 1000500
0.00394	تكتب 0.00394

بعض جداول التحويل

Some Conversion Tables

الطول

10 ملليمتر (مم) = 1سم (سم)
10 سنتيمتر = 1 ديسمتر (دس)
10 ديسمتر = 1 متر (م)
10 متر = 1 ديكامتر (dam) (دام)
10 ديكامتر = 1 هيكتومتر (هكم)
10 هيكتو متر = 1 كيلومتر (كم)

الكتلة

10 مليجرام مج = سنتيجرام (س. ج)
10 سنتيجرام = 1 ديسجرام (د ج)
10 ديسيجرام = 1 جرام (ج)
10 جرام = 1 ديكاجرام
10 ديكاجرام = 1 هيكتو جرام (هـ ج)
10 هكتوجرام = 1 كيلو جرام (كجم)
1000 كيلو جرام = 1 طن (ط)

المساحة

1 هكتار (هك) = 10000 $م^2$
100 هكتار = 1 $كم^2$

الحجم والسعة

1000 $سم^3$ = 1 لتر (ل)

الزمن

الدقيقة (ق)	= 60 ثانية (ث)
الساعة (س)	= 60 دقيقة
1 يوم	= 24 ساعة
1 أسبوع	= 7 أيام
1 عام	= 365 يوم
1 سنة كبيسة	= 366 يوم

1 الكسور الجبرية، والصيغ الرياضية، والرسوم البيانية
Algebraic Fractions, Formulae and Graphs

تذكر الكسور العددية على الصورة $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{3}$

وبالمثل لدينا الكسور الجبرية مثل:

$$\frac{ا}{2}، \frac{ا}{ب}، \frac{ا^2}{ب}، \frac{ا+ب}{2}، \frac{ا^2+ب^2}{ا^2-ب^2}، \frac{ا+ب}{ا-ب}$$

ملحوظة

يمكن أن تكون س، ص عددًا ولكن ص ≠ صفر

سوف تلاحظ كتابة هذه الكسور على الصورة $\frac{س}{ص}$ حيث س تعرف باسم **البسط**، ص تعرف باسم **المقام**.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على

- تبسيط الكسور الجبرية.
- ضرب، وقسمة، وجمع، وطرح الكسور الجبرية.
- حل المعادلات التي تتضمن الكسور الجبرية.
- التعبير عن الصيغة الجبرية بمتغيرات تابعة مختلفة.
- حل مشكلات تتضمن المتتابعات.
- حل المعادلات التربيعية بيانيًّا.
- رسم وحل الرسوم البيانية الأسية.
- تقدير ميل الأشكال البيانية غير الخطية.

1-1 تبسيط الكسور الجبرية التي لا تتضمن تحليلًا
Simplifying Algebraic Fractions Not Involving Factorisation

تعلمت أن الكسور العددية يمكن تبسيطها (جعلها في أبسط صورة) عن طريق "اختصار" العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

على سبيل المثال: $\frac{3}{2} = \frac{3 \times \overset{1}{\cancel{4}}}{2 \times \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{12}{8}$

وبالمثل الكسور الجبرية يمكن تبسيطها أيضًا.

على سبيل المثال: $\frac{ا3}{2} = \frac{ا \times \overset{1}{\cancel{2}} \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \times 2} = \frac{ا6}{4}$ ، $ا4 = \frac{\overset{1}{\cancel{ا}} \times ا \times 4}{\underset{1}{\cancel{ا}}} = \frac{\overset{2}{\cancel{ا}}4}{\cancel{ا}}$

يمكن تبسيط الكسور الجبرية عن طريق اختصار العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

اختصر:

(أ) $\frac{15 ك^2}{10}$ (ب) $\frac{3 ك^4}{ك}$

(جـ) $\frac{28 ك^2 ل^2}{21 ل}$ (د) $\frac{س}{س ص}$

ملحوظة

(ب) $ك^{4+1} = ك^3$

$= ك \times ك^3$

(أ) $\frac{15 ك^2}{10} = \frac{3 \times 5 \times ك^{\cancel{2}}}{\cancel{5} \times 2} = \frac{3 ك^2}{2}$

(ب) $\frac{3 ك^4}{ك} = \frac{3 \times ك^{\cancel{1}} \times ك^3}{\cancel{ك}} = 3 ك^3$

$= \frac{3 ك^3}{1} = 3 ك^3$

(جـ) $\frac{28 ك^2 ل^2}{21 ل} = \frac{4 \times \cancel{7} \times ك^{\cancel{2}} \times \cancel{ل^2}}{3 \times \cancel{7} \times \cancel{ل}} = \frac{4 ك^2 ل}{3}$

(د) $\frac{س}{س ص} = \frac{\cancel{س}}{\cancel{س} \times ص} = \frac{1}{ص}$

اختصر:

(أ) $\frac{(أ+ب)^2}{أ+ب}$ (ب) $\frac{أ-ب}{(أ+ب)(أ-ب)}$

(جـ) $\frac{س-2}{ص(س-2)}$ (د) $\frac{(س-3)(س-2)}{(س-3)^2}$

ملحوظة

(أ) (أ + ب) هو نفسه (ب + أ).

(د) (س - 3) عامل مشترك بين كل من البسط والمقام لاحظ أنه $\frac{س-2}{س-3} = \frac{-2}{-3}$

يعتبر خطأ لأن س ليس عاملًا من عوامل (س - 2) أو (س - 3).

(أ) $\frac{(أ+ب)^2}{أ+ب} = \frac{(أ+ب)(أ+ب)}{(أ+ب)} = (أ+ب)$

(ب) $\frac{(أ-ب)}{(أ+ب)(أ-ب)} = \frac{1}{أ+ب}$

$= \frac{(أ+ب)}{1}$

(جـ) $\frac{1}{ص} = \frac{س-2}{ص(س-2)}$

(د) $\frac{(س-3)(س-2)}{(س-3)^2} = \frac{(س-3)(س-2)}{(س-3)(س-3)}$

$= \frac{س-2}{س-3}$

1- في كل مما يأتي من مجموعات الكسور اكتب كلًّا من الكسر أو الكسور في أبسط صورة.

(أ) $\frac{2}{4}، \frac{12}{8}، \frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{9}، \frac{5}{6}، \frac{4}{7}$

(جـ) $\frac{أ2}{4}، \frac{12}{8ب}، \frac{2حـ}{3}$ (د) $\frac{أ3}{9ب}، \frac{أ5}{16}، \frac{4ب}{7}$

(هـ) $\frac{س ص}{ص}، \frac{س}{س ص}، \frac{س}{ص}$

(و) $\frac{3}{-3 س}، \frac{3 + س}{3 - س}، \frac{س}{3س}$

(ز) $\frac{م + ن}{م ن}، \frac{م (1 + ن)}{م}، \frac{ن}{ن (1 + م)}$

(ح) $\frac{هـ ك}{ك2}، \frac{هـ + ك}{ك + 2}، \frac{هـ + ك}{ك2}$

2- اختصر ما يأتي:

(أ) $\frac{22}{33}$ (ب) $\frac{أ8}{6}$

(جـ) $\frac{6}{12ى}$ (د) $\frac{24}{6حـ}$

(هـ) $\frac{ى}{6ى}$ (و) $\frac{2هـ}{5هـ}$

(ز) $\frac{أ ب}{أ}$ (ح) $\frac{ك}{هـ ك}$

3- أوجد الناتج في أبسط صورة.

(أ) $\frac{ب^3}{ب^2}$ (ب) $\frac{ى^2}{ى^3}$ (جـ) $\frac{8 أ ب}{4أ}$

(د) $\frac{6م ن}{12م}$ (هـ) $\frac{5هـ}{25هـ ك}$ (و) $\frac{9م^2}{18م}$

(ز) $\frac{2ك^2}{6ك^3}$ (ح) $\frac{3س^3}{6س^6}$

4- اختصر ما يأتي:

(أ) $\frac{أ (أ + ب)}{أ (أ - ب)}$ (ب) $\frac{ب (ب - ى)}{ب (ب + ى)}$

(جـ) $\frac{س^2}{س (س - ص)}$ (د) $\frac{س (س - ص)}{(س - ص)^2}$

(هـ) $\frac{(م + 1)^2}{(م + 1) (م - 1)}$ (و) $\frac{2أ^3 ب^4}{أ^2 ب^3}$

(ز) $\frac{9س^3 ص}{6س ص^3}$ (ح) $\frac{8 أ س^2}{4ب س}$

2-1 تبسيط الكسور الجبرية التي تتضمن تحليلًا

Simplifying Algebraic Fractions Involving Factorisation

إن تبسيط الكثير من الكسور الجبرية يتطلب معرفة تحليل المقادير الجبرية إلى عوامل.

الخطوة الأولى في تحليل المقادير الجبرية هي استخراج العوامل المشتركة في جميع الحدود. على سبيل المثال،

$2ص^2 + 8ص + 6 = 2(ص^2 + 4ص + 3)$

$= 2(ص + 1)(ص + 3)$

الثلاثة تطابقات:

$أ^2 + 2أب + ب^2 \equiv (أ + ب)^2$

$أ^2 - 2أب + ب^2 \equiv (أ - ب)^2$

$أ^2 - ب^2 \equiv (أ + ب)(أ - ب)$

مفيدة أيضًا في تحليل بعض المقادير التربيعية.

مثال 3

اختصر

(أ) $\frac{أ}{أ^2 - أب}$ (ب) $\frac{أ^2 - أب}{أب - ب^2}$

(جـ) $\frac{2س - 4}{4ص + 8}$ (د) $\frac{16 - س^2}{8 + 6س - س^2}$

الحل

(أ) $\frac{أ}{أ^2 - أب} = \frac{أ}{أ(أ - ب)} = \frac{1}{أ - ب}$

(ب) $\frac{أ^2 - أب}{أب - ب^2} = \frac{أ(أ - ب)}{ب(أ - ب)} = \frac{أ}{ب}$

(جـ) $\frac{2س - 4}{4ص + 8} = \frac{2(س - 2)}{4(ص + 2)} = \frac{س - 2}{2(ص + 2)}$

(د) $\frac{16 - س^2}{8 + 6س - س^2} = \frac{4^2 - س^2}{(4 - س)(2 - س)} = \frac{(4 + س)(4 - س)}{(4 - س)(2 - س)} = \frac{4 + س}{2 - س}$

ملحوظة

(د)

$-2س$	$س$ -2	
$-4س$	$س$ -4	
$-6س$	$8 + س^2$	

مثال 4

اختصر

(أ) $\frac{2ى - 6ن}{ى^2 - 6ى ن + 9ن^2}$ (ب) $\frac{ى^2 + 2ى ن + ن^2}{ى^2 - ن^2}$

(جـ) $\frac{س - ص}{2ص - 2س}$ (د) $\frac{س - ص}{ص^2 - س^2}$

الحل

(أ) $\frac{2ى - 6ن}{ى^2 - 6ى ن + 9ن^2} = \frac{2(ى - 3ن)}{(ى - 3ن)(ى - 3ن)} = \frac{2}{ى - 3ن}$

(ب) $\frac{ى^2 + 2ى ن + ن^2}{ى^2 - ن^2} = \frac{(ى + ن)(ى + ن)}{(ى - ن)(ى + ن)} = \frac{ى + ن}{ى - ن}$

(جـ) $\frac{س - ص}{2ص - 2س} = \frac{س - ص}{2(ص - س)} = \frac{-(ص - س)}{2(ص - س)} = -\frac{1}{2}$

(د) $\frac{س - ص}{ص^2 - س^2} = \frac{س - ص}{(ص - س)(ص + س)} = -\frac{1}{ص + س}$

ملحوظة

(أ) $ى^2 - 6ى ن + 9ن^2 =$
$ى^2 - 2(ى)(3ن) + (3ن)^2$
والتي على الصورة $أ^2 - 2أب + ب^2 = (أ - ب)^2$
$\therefore ى^2 - 2(ى)(3ن) + (3ن)^2 =$
$(ى - 3ن)^2$

(جـ) $-(ص - س) = -ص + س$
$= س - ص$

(د) $-(ص - س) = -ص + س$
$= س - ص$

1- حلل الآتي:

(أ) $س^2 + س - 6$ (ب) $س^2 - 2س - 15$

(جـ) $ص^2 + 6ص + 9$ (د) $أ^4 - أ^2 + 1$

(هـ) $ب^2 - 25$ (و) $4ب^2 - 9$

(ز) $2ى^2 - 6ى + 4$ (ح) $3ى^2 + 9ى + 6$

2- اختصر ما يأتي

(أ) $\frac{أب - أ^2}{أب}$ (ب) $\frac{حـ^2 + حـ ك}{حـ ك + ك^2}$

(جـ) $\frac{3س + 6}{6ص - 9}$ (د) $\frac{2س + 4ص}{4س - 8ص}$

(هـ) $\frac{ى^2 - 9}{ى^2 + ى - 6}$ (و) $\frac{25 - 4ن^2}{25 - ن + 2ن^2}$

(ز) $\frac{س + 4}{س^2 + 2س - 8}$ (ح) $\frac{ص + 7}{3ص^2 + 20ص - 7}$

3- أوجد الناتج في أبسط صورة.

(أ) $\frac{أ^2 2 + أ 5 - 2}{4 - أ^2}$ (ب) $\frac{9 + أ 3}{3 - أ 8 + أ^2 3}$

(جـ) $\frac{6حـ - 2د}{9حـ^2 - 6حـ ك + ك^2}$ (د) $\frac{م^2 - 2م ب + ب^2}{م^2 - ب^2}$

(هـ) $\frac{4م^2 + 12م ب + 9ب^2}{4م^2 - 9ب^2}$ (و) $\frac{9ن^2 + 24ن + 16}{16 - 9ن^2}$

(ز) $\frac{س - 2ص}{6ص - 3س}$ (ح) $\frac{ص - 2س}{4س^2 - ص^2}$

4- اختصر: $\frac{2ص^2 - 3ص - 5}{ص^2 - 1}$

3-1 ضرب وقسمة الكسور الجبرية

Multiplication and Division of Algebraic Fractions

عند ضرب الكسور،

1- نختصر العوامل المشتركة بين كل من البسط والمقام،

2- نُضرِب العوامل المتبقية في كل من البسط والمقام في بعضها.

على سبيل المثال $\frac{6}{7} = \frac{3 \times 2}{7 \times 1} = \frac{\overset{3}{15}}{49} \times \frac{\overset{2}{14}}{\underset{1}{5}} = \frac{15}{49} \times \frac{14}{5}$

$\underset{7}{}$

بالمثل يمكن استخدام نفس القواعد في ضرب الكسور الجبرية.

على سبيل المثال: $\frac{3}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{18}}\overset{3}{ب}}{\underset{1}{\cancel{25}}م} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}م}{\underset{1}{\cancel{6}}ب} = \frac{18ب}{25م} \times \frac{5م}{6ب}$

$$\frac{5ت}{14} = \frac{5 \times ت}{7 \times 2} = \frac{\overset{1}{\cancel{10}}\overset{5}{ص}}{\underset{1}{21}ت} \times \frac{\overset{ت}{3ت^2}}{\underset{1}{\cancel{4}}ص} = \frac{10ص}{21ت} \times \frac{3ت^2}{4ص}$$

$\underset{7}{}$ $\underset{2}{}$

لتبسيط عملية ضرب الكسور الجبرية:

1- حلل المقدار كلما كان ذلك ممكنًا.

2- اختصر (اشطب) العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

على سبيل المثال $\frac{أ2 - 4ب}{6حـ} \times \frac{أ3}{أ - 2ب} = \frac{2(أ - 2ب)}{6حـ} \times \frac{أ3}{(أ - 2ب)} = \frac{أ}{حـ}$

لقسمة كسر جبري على كسر جبري آخر:

1- اقلب المقسوم عليه رأسًا على عقب (اجعل المقام بسطًا والبسط مقامًا).

2- غير علامة (÷) إلى علامة (×).

3- واصل عملية الضرب .

على سبيل المثال $\frac{أ2}{3ب} \div \frac{4}{9ب} = \frac{أ2}{3ص} \times \frac{9ب}{4} = \frac{3أ}{2}$

اختصر:

(أ) $\frac{أ}{7} \times \frac{4}{أ}$ (ب) $\frac{4س ص}{ع} \times \frac{ع3}{8س}$

(جـ) $\frac{3ك ن}{5ي} \times \frac{10ك ي}{21ن ط}$ (د) $\frac{ك5}{6} \div \frac{2ن}{12}$

(أ) $\frac{أ}{7} \times \frac{4}{أ} = \frac{4}{7}$ (ب) $\frac{4س ص}{ع} \times \frac{ع3}{8س} = \frac{3 \times ص}{2}$

$= \frac{3ص}{2}$

(جـ) $\frac{3ك ط}{5ل} \times \frac{10ك ي}{21ل ط} = \frac{2ك \times ك}{7ط}$ (د) $\frac{ك5}{6} \div \frac{2ن}{12} = \frac{ك5}{6} \times \frac{12}{2ن}$

$= \frac{ك2^2}{7ط}$ $= \frac{ك5}{ن}$

اختصر:

(أ) $\frac{3ب - أ}{ب} \times \frac{أ2}{3أب - أ^2}$ (ب) $\frac{6 + س5 - س^2}{3 + س} \times \frac{1}{2 - س}$

(جـ) $\frac{ك + ن}{ن} \div \frac{3ك + 3ن}{ك ن}$ (د) $\frac{2ص^2 - 5ص + 2}{1 - ص} \div (2ص - 1)$

(أ) $\frac{أ2}{^2أ - أ3} \times \frac{أ - ب3}{ب}$

$= \frac{^1أ2}{(أ_1 - ب3)\,أ_1} \times \frac{^1أ - ب3}{ب}$

$= \frac{2}{ب}$

(ب) $\frac{^2س - 5س + 6}{3 + س} \times \frac{1}{2 - س}$

$= \frac{(3 - س)\,(^1 2 - س)}{3 + س} \times \frac{1}{س_1 - 2}$

$= \frac{3 - س}{3 + س}$

(جـ) $\frac{ك + نـ}{نـ} \div \frac{ك3 + ن3}{كنـ}$

$= \frac{كنـ}{ك3 + ن3} \times \frac{ك + نـ}{نـ}$

$= \frac{كنـ^1}{(ن + ك)3_1} \times \frac{ك + نـ^1}{نـ_1}$

$= \frac{ك}{3}$

(د) $(1 - ص2) \div \frac{^2ص2 - 5ص + 2}{1 - ص}$

$= \frac{1 - ص2}{1} \div \frac{^2ص2 - 5ص + 2}{1 - ص}$

$= \frac{1}{1 - ص2} \times \frac{^2ص2 - 5ص + 2}{1 - ص}$

$= \frac{1}{(1_1 - ص2)} \times \frac{(^1 ص2 - 1)\,(2 - ص)}{(1 - ص)}$

$= \frac{2 - ص}{1 - ص}$

اختصر:

(أ) $\frac{أ}{3 + أ} \times \frac{^2أ + 6أ + 9}{2 + أ}$

(ب) $\frac{1}{2 - ك} \times \frac{4 - ^2ك}{4 + ك}$

(جـ) $\frac{^2ب - 4ب + 4}{1 - ب} \div (2 - ب)$

(د) $\frac{9 + ن12 - ^2ن4}{^2نـ} \div \frac{9 - ^2ن4}{نـ}$

(أ) $\frac{أ}{3 + أ} \times \frac{(3 + أ)\,(أ + 1)}{2 + أ} = \frac{أ}{3 + أ} \times \frac{^2أ + 6أ + 9}{2 + أ}$

$= \frac{(3 + أ^1)\,أ}{2 + أ}$

(ب) $\frac{أ}{2 - ك} \times \frac{(2 - ك^1)\,(2 + ك)}{4 + ك} = \frac{1}{2 - ك} \times \frac{4 - ^2ك}{4 + ك}$

$= \frac{2 + ك}{4 + ك}$

(جـ) $\frac{1}{2-ب} \times \frac{4+ب4-ب^2}{1-ب} = (2-ب) \div \frac{4+ب4-ب^2}{1-ب}$

$= \frac{(2-ب)(2-ب)}{1-ب} = \frac{1}{(2-ب)} \times \frac{2-ب}{1-ب}$

(د) $\frac{4ن^2-9}{ن} \div \frac{4ن^2-12ن+9}{ن^2} = \frac{(2ن)^2-3^2}{ن} \times \frac{ن^2}{4ن^2-12ن+9}$

$= \frac{(2ن+3)(2ن-3)}{ن} \times \frac{ن^2}{(2ن-3)(2ن-3)} = \frac{(2ن+3)ن}{3-2ن}$

تمرين 1-ب

1- اختصر ما يلي:

(أ) $\frac{3}{أ} \times \frac{2أ}{3}$

(ب) $\frac{4ب}{5} \times \frac{5}{ب}$

(جـ) $\frac{6هـ}{7} \times \frac{14}{2ت}$

(د) $\frac{5م}{6} \times \frac{12}{ن}$

(هـ) $\frac{س ص}{3} \times \frac{3}{ص ع}$

(و) $\frac{ط ك}{7} \times \frac{7}{ك د}$

(ز) $\frac{9أ}{ن^2} \times \frac{م^4}{3أ}$

(ح) $\frac{6ت}{7ص} \times \frac{8ص ع}{9ت}$

2- اختصر ما يأتي:

(أ) $\frac{3هـ}{11} \div \frac{هـ}{22}$

(ب) $\frac{6ذ}{7} \div \frac{ذ}{28}$

(جـ) $\frac{11ص}{15} \div \frac{2ع}{5}$

(د) $\frac{8ذ}{3} \div \frac{5ت}{6}$

(هـ) $\frac{ذ ت}{5} \div \frac{ت ي}{5}$

(و) $\frac{4}{ت ك} \times \frac{2}{د ط}$

(ز) $\frac{7رذ}{14ت} \div \frac{ر}{3ت}$

(ح) $\frac{8د ط}{9ر} \div \frac{4ك}{3رذ}$

3- اختصر $\frac{3أ}{5حـ^2} \times \frac{10حـ^3}{أ^2}$

4- اختصر:

(أ) $\frac{أب^2}{2أ-4ب} \times \frac{3أ-6ب}{أ^2ب}$

(ب) $\frac{3م}{3م^2+ن} \times \frac{3م^2ن+ن^2}{م^2}$

(جـ) $\frac{س^2-3س ص}{2ص^2} \div \frac{س-3ص}{4س}$

(د) $\frac{هـ^3+هـ^2ك}{هـ ك^2-ك^3} \div \frac{هـ^2+هـ ك}{هـ ك-ك^2}$

(هـ) $\frac{ى^2+3ى+2}{ى+3} \times \frac{ى^2+3ى}{ى+2}$

(و) $\frac{ن^2-4ن-45}{ن-5} \times \frac{ن}{ن-9}$

(ز) $\frac{أ^2+4أ-5}{أ^2-1} \div \frac{أ^2+13أ+15}{أ+9}$

(ح) $\frac{س^2+5س+6}{س^2+س-6} \div \frac{س^2+2س}{4-س2}$

5- اختصر:

(أ) $\frac{أ^2-5أ+6}{4-أ^2} \times \frac{أ^2}{أ^2-3أ}$

(ب) $\frac{4ب^2-1}{2ب^2+3ب+1} \times \frac{ب^2+ب}{2-ب4}$

(جـ) $\frac{9هـ^2-4}{هـ^2-2هـ} \div \frac{6هـ+4}{هـ^2}$

(د) $\frac{ك-4}{ك^2-25} \div \frac{3ك-12}{5+ك}$

(هـ) $\frac{م^2-9}{م^2+4م+4} \times \frac{م+2}{م}$

(و) $\frac{ن+2}{2-ن3} \times \frac{4+ن12-ن^2 9}{6+ن3}$

(ز) $\frac{ص^2-4ص+4}{ص^2-4} \div \frac{2ص-4}{1-ص}$

(ح) $\frac{س^2+6س+9}{9+س3} \div \frac{س^2-9}{3}$

4-1 جمع وطرح الكسور الجبرية ذات المقامات العددية

Addition and Subtraction of Algebraic Fractions with Numerical Denominators

تعلمنا وجوب توحيد مقامات الكسور العددية قبل عملية الجمع أو الطرح.

على سبيل المثال $\frac{2\times1}{2\times6}+\frac{3\times3}{3\times4}=\frac{1}{6}+\frac{3}{4}$

$=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}$

$=\frac{11}{12}$

ونعبر بالمثل عن الكسور الجبرية بنفس المقام قبل جمعها أو طرحها

على سبيل المثال $\frac{2\times أ}{2\times6}+\frac{3\times أ3}{3\times4}=\frac{أ}{6}+\frac{أ3}{4}$

$=\frac{أ2}{12}+\frac{أ9}{12}$

$=\frac{أ11}{12}$

لجمع أو طرح الكسور الجبرية:

1- أوجد المضاعف المشترك الأدنى للمقامات (م . م . أ).

2- أعد كتابة الكسور الجبرية بعد توحيد مقاماتها مستخدمًا (م . م . أ).

3- ثم اجمع أو اطرح البسط كما هو مطلوب.

ملحوظة

$\frac{6،4|2}{3،2}$

المضاعف المشترك الأدنى م . م . أ للمقامات 6،4 هو

$2\times2\times3$

$=12$

اختصر:

(أ) $\frac{أ8}{15}+\frac{أ4}{15}$

(ب) $\frac{م}{2}+\frac{م2}{7}$

(جـ) $\frac{ب5}{6}+\frac{ب2}{9}$

(د) $\frac{س3}{4}+\frac{س2}{3}+\frac{س}{2}$

ملحوظة

(أ) يوضع المقام كما هو في الكسور ذات المقامات المتساوية

(ب) المضاعف المشترك الأدنى للمقامات 2،7

$=7\times2$

$=14$

(أ) $\frac{أ8+أ4}{15}=\frac{أ8}{15}+\frac{أ4}{15}$

$=\frac{أ12}{15}$ (4 / 5)

$=\frac{أ4}{5}$

(ب) $\frac{7\times م}{7\times2}+\frac{2\times م2}{7\times2}=\frac{م}{2}+\frac{م2}{7}$

$=\frac{م7}{14}+\frac{م4}{14}$

$=\frac{م11}{14}=\frac{م7+م4}{14}$

ملحوظة

(جـ) المضاعف المشترك الأدنى للمقامات 9،6 هو
$3 \times 2 \times 3 = 18$

(د) المضاعف المشترك الأدنى للمقامات 2، 3، 4 هو:
$2 \times 3 \times 2 = 12$

(جـ) $\frac{2ن}{9} + \frac{5ن}{6}$

$= \frac{2ن \times 2}{9 \times 2} + \frac{5ن \times 3}{6 \times 3}$

$= \frac{4ن}{18} + \frac{15ن}{18}$

$= \frac{4ن + 15ن}{18}$

$= \frac{19ن}{18}$

(د) $\frac{س}{2} + \frac{2س}{3} + \frac{3س}{4}$

$= \frac{س \times 6}{6 \times 2} + \frac{2س \times 4}{3 \times 4} + \frac{3س \times 3}{3 \times 4}$

$= \frac{6س}{12} + \frac{8س}{12} + \frac{9س}{12}$

$= \frac{6س + 8س + 9س}{12}$

$= \frac{23س}{12}$

اختصر:

(أ) $\frac{7أ}{9} - \frac{4أ}{9}$

(ب) $\frac{2م}{5} - \frac{م}{3}$

(جـ) $\frac{3ن}{8} - \frac{ن}{10}$

(د) $\frac{7س}{8} - \frac{س}{6} - \frac{س}{4}$

ملحوظة

(أ) يوضع المقام كما هو في الكسور ذات المقامات المتساوية

(ب) المضاعف المشترك الأدنى للأعداد 3، 5 هو
3×5
$= 15$

(جـ)
$2 \overline{)8، 10}$
$5، 4$

م. م. أ للعددين 8، 10 هو
$2 \times 4 \times 5$
$= 40$

(د)
$2 \overline{)8، 6، 4}$
$2 \overline{)4، 3، 4}$
$2، 3، 1$

م. م. أ للأعداد 4، 6، 8 هو
$2 \times 2 \times 2 \times 3$
$= 24$

(أ) $\frac{7أ}{9} - \frac{4أ}{9} = \frac{7أ - 4أ}{9}$

$= \frac{3أ}{9}$

$= \frac{أ}{3}$

(ب) $\frac{2م}{5} - \frac{م}{3} = \frac{2م \times 3}{5 \times 3} - \frac{م \times 5}{3 \times 5}$

$= \frac{6م}{15} - \frac{5م}{15}$

$= \frac{6م - 5م}{15} = \frac{م}{15}$

(جـ) $\frac{3ن}{8} - \frac{ن}{10}$

$= \frac{3ن \times 5}{8 \times 5} - \frac{4ن}{10 \times 4}$

$= \frac{15ن}{40} - \frac{4ن}{40}$

$= \frac{15ن - 4ن}{40}$

$= \frac{11ن}{40}$

(د) $\frac{7س}{8} - \frac{س}{6} - \frac{س}{4}$

$= \frac{7س \times 3}{8 \times 3} - \frac{س \times 4}{6 \times 4} - \frac{س \times 6}{4 \times 6}$

$= \frac{21س}{24} - \frac{4س}{24} - \frac{6س}{24}$

$= \frac{21س - 4س - 6س}{24}$

$= \frac{11س}{24}$

1- اختصر:

(أ) $\frac{3أ}{13} + \frac{9أ}{13}$

(ب) $\frac{7ب}{16} + \frac{5ب}{16}$

(جـ) $\frac{حـ}{3} + \frac{حـ}{4}$

(د) $\frac{م}{6} + \frac{2م}{5}$

(هـ) $\frac{ن}{3} + \frac{ن}{9}$

(و) $\frac{ك}{10} + \frac{4ك}{5}$

(ز) $\frac{9ذ}{10} + \frac{2ذ}{15}$

(ح) $\frac{3هـ}{8} + \frac{5هـ}{22}$

2- اختصر ما يلي:

(أ) $\frac{أ4}{10} - \frac{أ9}{10}$

(ب) $\frac{ب19}{28} - \frac{ب11}{28}$

(جـ) $\frac{س}{9} - \frac{س}{2}$

(د) $\frac{ص}{3} - \frac{ص2}{5}$

(هـ) $\frac{م}{8} - \frac{م}{4}$

(و) $\frac{ن7}{20} - \frac{ن4}{5}$

(ز) $\frac{ك8}{21} - \frac{ك7}{9}$

(ح) $\frac{هـ5}{12} - \frac{هـ3}{16}$

3- اختصر ما يلي:

(أ) $\frac{أ}{2} + \frac{أ3}{4} + \frac{أ5}{6}$

(ب) $\frac{ب3}{4} - \frac{ب2}{3} + \frac{ب}{2}$

(جـ) $\frac{س4}{5} - \frac{س3}{4} + \frac{س}{2}$

(د) $\frac{ص9}{10} - \frac{ص2}{5} - \frac{ص}{2}$

(هـ) $\frac{م13}{15} - \frac{م5}{12} - \frac{م}{10}$

(و) $\frac{ن25}{28} + \frac{ن11}{21} + \frac{ن}{3}$

(ز) $\frac{ت3}{4} - \frac{ت5}{8} + \frac{ت11}{12}$

(ح) $\frac{هـ}{3} + \frac{هـ5}{12} + \frac{هـ3}{16}$

اختصر:

(أ) $\frac{أ}{3} + \frac{أ+1}{2}$

(ب) $\frac{ب+3}{2} + \frac{ب-1}{4}$

(جـ) $\frac{م}{2} - \frac{م+1}{3}$

(د) $\frac{ن+1}{3} - \frac{ن+2}{6}$

ملحوظة

(أ) م.م.أ للعددين 2، 3 هو 6

البسط (أ + 1) مضروب في العدد 3

(د) البسط (ن + 2) يوضع بين قوسين

(أ) $\frac{أ}{3} + \frac{أ+1}{2} = \frac{أ \times 2}{6} + \frac{(1+أ) \times 3}{6} = \frac{أ2}{6} + \frac{(1+أ)3}{6} = \frac{أ2+3+أ3}{6} = \frac{3+أ5}{6}$

(ب) $\frac{ب+3}{2} + \frac{ب-1}{4} = \frac{(ب+3)2}{4} + \frac{ب-1}{4} = \frac{(ب+3)2+(ب-1)}{4} = \frac{ب2+6+ب-1}{4} = \frac{5+ب3}{4}$

(جـ) $\frac{م}{2} - \frac{م+1}{3} = \frac{م3}{6} - \frac{(1+م)2}{6} = \frac{م3-(1+م)2}{6} = \frac{م3-2+م2}{6} = \frac{م-2}{6}$

(د) $\frac{ن+1}{3} - \frac{ن+2}{6} = \frac{(1+ن)2}{6} - \frac{ن+2}{6} = \frac{(1+ن)2-(2+ن)}{6} = \frac{ن2-2-ن+2}{6} = \frac{ن}{6}$

1- اختصر

(أ) $\frac{أ+2}{3} + \frac{أ}{2}$

(ب) $\frac{ب+3}{4} + \frac{ب}{3}$

(جـ) $\frac{حـ-2}{5} + \frac{حـ}{7}$

(د) $\frac{ص-5}{6} + \frac{ص}{5}$

(هـ) $\frac{م+1}{2} + \frac{م+2}{3}$

(و) $\frac{ن+4}{3} + \frac{2-ن}{5}$

(ح) $\frac{هـ-4}{2} + \frac{هـ-3}{7}$

(ز) $\frac{س-3}{5} + \frac{1-س2}{4}$

2- اختصر ما يأتي:

(أ) $\frac{أ+2}{4} + \frac{أ}{2}$ (ب) $\frac{ب+2}{6} - \frac{ب}{3}$ (جـ) $\frac{حـ-8}{3} - \frac{حـ}{4}$ (د) $\frac{5}{9} - \frac{3-2ت}{4}$

(هـ) $\frac{م}{2} - \frac{م+1}{3}$ (و) $\frac{2ن}{5} - \frac{ن-1}{3}$ (ز) $\frac{ص+3}{5} - \frac{ص+1}{3}$ (ح) $\frac{3-2هـ}{5} - \frac{1-هـ}{4}$

(ط) $\frac{س}{5} + \frac{س-4}{10}$ (ي) $\frac{ص-4}{2} + \frac{ص}{6}$ (ك) $\frac{ن-2}{6} + \frac{1-ن}{4}$ (ل) $\frac{م+4}{12} + \frac{3-م}{8}$

(م) $\frac{2س-ص}{3} + \frac{س+ص}{6}$ (ن) $\frac{هـ-2ك}{2} + \frac{ك-هـ}{4}$

3- اختصر ما يأتي:

(أ) $\frac{أ}{2} - \frac{أ+1}{2}$ (ب) $\frac{ب}{5} - \frac{4-2ب}{5}$ (جـ) $\frac{3حـ}{7} - \frac{8+2حـ}{7}$ (د) $\frac{3ذ}{8} - \frac{3-5ذ}{8}$

(هـ) $\frac{م}{3} - \frac{م+1}{3}$ (و) $\frac{ن}{4} - \frac{3-ن}{4}$ (ز) $\frac{2س}{11} - \frac{4+س}{11}$ (ح) $\frac{8هـ}{9} - \frac{3-2هـ}{9}$

4- اختصر ما يأتي:

(أ) $\frac{أ}{3} - \frac{أ+1}{2}$ (ب) $\frac{ب}{5} - \frac{ب-3}{2}$

5- اختصر ما يأتي:

(أ) $\frac{أ+2}{4} - \frac{أ+1}{2}$ (ب) $\frac{3+ب}{9} - \frac{5+2ب}{3}$ (جـ) $\frac{ذ+3}{8} - \frac{ذ-5}{2}$ (د) $\frac{ص+8}{5} - \frac{ص-3}{15}$

(هـ) $\frac{م-3}{6} - \frac{م-2م5}{9}$ (و) $\frac{ن-5}{4} - \frac{3-ن}{6}$ (ز) $\frac{س+5}{15} - \frac{3-2س}{10}$ (ح) $\frac{2هـ+7}{12} - \frac{هـ-3}{8}$

6- عبر عما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة:

(أ) $\frac{س+6}{5} + \frac{1-س}{2}$

(ب) $\frac{ص-2}{3} - \frac{2ص-3}{6}$

(جـ) $\frac{2س}{5} - \frac{س}{4}$

5-1 جمع وطرح الكسور الجبرية ذات المقامات الجبرية

Addition and Subtraction of Algebraic Fractions with Algebraic Denominators

في التدريبين الأخيرين كانت الكسور الجبرية في عمليات الجمع والطرح ذات مقامات عددية مثل 2 في $\frac{أ}{2}$، 3 في $\frac{أ+1}{3}$. يمكن استخدام نفس القاعدة في جمع وطرح الكسور الجبرية ذات المقامات الجبرية مثل (أ) في $\frac{2}{أ}$، $\frac{ب+أ}{أ}$.

على سبيل المثال $\frac{1}{أ} + \frac{2}{أ} = \frac{2+1}{أ} = \frac{3}{أ}$

تذكر وجوب توحيد مقامات الكسور الجبرية قبل إجراء عملية الجمع أو الطرح.

ملحوظة

$أ^2 ب^4$	$أ^3 ب^2$
$أ^2 ب^3$	$أ^2 ب^2$

∴ المضاعف المشترك الأدنى $= أ^3 ب^4$

مثال $\frac{2 \times 1}{2 \times أ^2 ب^3} + \frac{3 \times 3}{3 \times أ^3 ب^2} = \frac{1}{أ^2 ب^3} + \frac{3}{أ^3 ب^2}$

$= \frac{2}{أ^3 ب^4} + \frac{9}{أ^3 ب^4}$

$= \frac{11}{أ^3 ب^4} = \frac{2 + 9}{أ^3 ب^4}$

لاحظ أن طريقة إيجاد المضاعف المشترك الأدنى للمقامات الجبرية هى نفسها في المقامات العددية.

أوجد المضاعف المشترك الأدنى للآتي:

(أ) $5أ^2$ ، $أ^2$ (ب) $ب^2 - 3ب$ ، $ب - 3$

(جـ) $م^2 - 4$ ، $م^2 - 2م$ (د) $س^2 + 4س + 4$ ، $س + 2$

(هـ) $س^2 - س - 6$ ، $س - 3$ (و) $س^2 - 2س + 1$ ، $2س - 2$

(أ) المضاعف المشترك $أ^2 \cdot 5أ^2$ ، $5أ$

توقف عن القسمة حيث لا يوجد قاسم مشترك بين $أ$ ، 5 سوى العدد 1

∴ المضاعف المشترك الأدنى للحدين $5أ^2$ ، $أ^2 = أ \times 5 \times أ = 5أ^2$

(ب) $ب^2 - 3ب = ب(ب - 3)$ بتحليل المقدار يمكن قسمته على عوامله

المضاعف المشترك $ب - 3$ $ب(ب - 3)$ ، $(ب - 3)$

$1 \cdot ب$

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقادير $ب(ب - 3)$ ، $ب - 3 = ب \times (ب - 3) \times 1$

$= ب(ب - 3)$

(جـ) $م^2 - 4 = م^2 - 2^2 = (م - 2)(م + 2)$

$م^2 - 4 = 2(م - 2)$

المضاعف المشترك $م - 2$ $(م - 2)(م + 2)$ ، $2(م - 2)$

$م + 2$ ، 2

توقف عن عملية القسمة لأن $(م + 2)$ و 2 ليس بينهما عامل مشترك عدا 1

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقادير $م^2 - 4$ ، $2(م - 2) = 2(م - 2)(م + 2)$

(د) $س^2 + 4س + 4 = (س + 2)(س + 2)$

المضاعف المشترك $س + 2$ $(س + 2)(س + 2)$ ، $س + 2$

$س + 2$ ، 1

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقادير $س^2 + 4س + 4$ ، $س + 2 = (س + 2)(س + 2)$

(هـ) $س^2 - س - 6 = (س + 2)(س - 3)$

المضاعف المشترك: $س - 3$ $(س + 2)(س - 3)$، $س - 3$
$س + 2$، 1

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقادير $س^2 - س - 6$، $س - 3 = (س+2)(س-3)$

(و) $س^2 - 2س + 1 = (س - 1)(س - 1)$
$2س - 2 = 2(س - 1)$

المضاعف المشترك: $س - 1$ $(س - 1)(س - 1)$، $2(س - 1)$
$س - 1$، 2

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقادير $س^2 - 2س + 1$، $2(س-1) = 2(س-1)(س-1)$

بسط واختصر ما يلي إلى كسر وحيد:

(أ) $\frac{2}{أ} - \frac{5}{أ}$ (ب) $\frac{3}{2س} + \frac{4}{س}$

(جـ) $\frac{3}{ب} + ب$ (د) $\frac{2}{ص} + \frac{3}{ص}$

ملحوظة

(ب) س | س، 2س
1، 2

∴ المضاعف المشترك الأدنى
م. م. أ للعددين
س، 2س هو
$س \times 1 \times 2 = 2س$

(جـ) م. م. أ للعددين
ب، 1 = ب

(د) م. م. أ للعددين
ص، 2 هو = 2ص

(أ) $\frac{2-5}{أ} = \frac{2}{أ} - \frac{5}{أ}$
$= \frac{3}{أ}$

(ب) $\frac{3}{2س} + \frac{2 \times 4}{2 \times س} = \frac{3}{2س} + \frac{4}{س}$
$= \frac{3}{2س} + \frac{8}{2س}$
$= \frac{8+3}{2س}$
$= \frac{11}{2س}$

(جـ) $\frac{3}{ب} + ب = \frac{3}{ب} + \frac{ب}{1}$
$= \frac{3}{ب} + \frac{ب \times ب}{1 \times ب}$
$= \frac{3}{ب} + \frac{ب^2}{ب}$
$= \frac{3 + ب^2}{ب}$

(د) $\frac{3}{ص} + \frac{3 \times 2}{2 \times ص} = \frac{3}{2} + \frac{ص \times ص}{2 \times ص}$
$= \frac{6}{2ص} + \frac{ص^2}{2ص}$
$= \frac{6 + ص^2}{2ص}$

عبر عن كل مما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة.

(أ) $\frac{1}{3م} + \frac{1}{2م^2}$ (ب) $\frac{3}{4أ} + \frac{1}{2ب}$

(جـ) $\frac{1}{2س} + \frac{3}{س ص}$ (د) $\frac{م}{ب} + \frac{ب}{م}$

ملحوظة

(أ) $\frac{م \mid م^2 م^3 ، م^3}{م^3}$

∴ المضاعف المشترك الأدنى $م^2 م^3$

$= 3 \times م \times م$

$= م^3$

(ب) $\frac{2 \mid 2أ^4 ، 2ب}{أ^2 ب}$

∴ المضاعف المشترك الأدنى $2أ^4 ب$

$= 2 \times أ^2 \times ب$

$= 2أ^4 ب$

(جـ) $\frac{س \mid 2س ص ، س ص}{2 ، ص}$

∴ المضاعف المشترك الأدنى $2س ص$

$= س \times 2 \times ص$

$= 2س ص$

(د) المضاعف المشترك الأدنى $م ، ن = م ن$

(أ) $\frac{1}{م} + \frac{3}{م^2} = \frac{م \times 1}{م \times م^3} + \frac{3 \times 1}{3 \times م^2} = \frac{م + 3}{م^2 3}$

(ب) $\frac{ب \times 3}{أ^4 \times ب} + \frac{أ^2 \times 1}{أ^2 \times أ^2} = \frac{3}{أ^4} + \frac{1}{ب} = \frac{ب 3 + أ^2}{أ^4 ب}$

(جـ) $\frac{1}{2س} + \frac{3}{ص} = \frac{1 \times ص}{2س \times ص} + \frac{3 \times 2 س ص}{ص \times 2 س ص} = \frac{ص + 6 س 2}{2 س ص}$

(د) $\frac{م}{ن} + \frac{ن}{م} = \frac{م \times م}{ن \times م} + \frac{ن \times ن}{م \times ن} = \frac{م^2 + ن^2}{م ن}$

عبر عما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة.

(أ) $\frac{1}{س + 1} - \frac{1}{س + 2}$ (ب) $\frac{2}{س + 3} + \frac{1}{(س + 3)^2}$

(جـ) $\frac{2}{س + 1} - \frac{3}{(س + 1)(س + 2)}$

ملحوظة

(أ) المضاعف المشترك الأدنى للمقامات

$= (س + 1)(س + 2)$

(أ) $\frac{1(س + 1)}{(س + 1)(س + 2)} - \frac{1(س + 2)}{(س + 1)(س + 2)} = \frac{1}{س + 1} - \frac{1}{س + 2}$

$= \frac{(س + 1) - (س + 2)}{(س + 1)(س + 2)}$

$= \frac{س + 1 - س - 2}{(س + 1)(س + 2)} = \frac{1}{(س + 1)(س + 2)}$

(ب) $\frac{(س + 3)^2 ، (س + 3) ، 1}{س + 3}$

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقامات

$= (س + 3) \times 1 \times (س + 3)$

$= (س + 3)^2$

(ب) $\frac{2(س + 3)}{(س + 3)(س + 3)} + \frac{1}{(س + 3)^2} = \frac{2}{س + 3} + \frac{1}{(س + 3)^2}$

$= \frac{1 + 2(س + 3)}{(س + 3)^2} = \frac{1 + 6 + 2س}{(س + 3)^2} = \frac{7 + 2س}{(س + 3)^2}$

(جـ) $\frac{س + 1 \mid (س + 1)(س + 2) ، (س + 1) ، 1}{س + 2}$

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقامات

$= (س + 1) \times 1 \times (س + 2)$

$= (س + 1)(س + 2)$

(جـ) $\frac{2}{س + 1} - \frac{3}{(س + 1)(س + 2)} = \frac{2(س + 2)}{(س + 1)(س + 2)} - \frac{3}{(س + 1)(س + 2)}$

$= \frac{2(س + 2) - 3}{(س + 1)(س + 2)}$

$= \frac{1 + 2س}{(س + 1)(س + 2)} = \frac{3 - 4 + 2س}{(س + 1)(س + 2)}$

عبر عن كلٍّ مما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة.

(أ) $\frac{1}{2أ + 2ب} - \frac{1}{3أ + 3ب}$ (ب) $\frac{1}{أ + ب} - \frac{2ب}{أ^2 - ب^2}$

(جـ) $\frac{2}{1 - س2} - \frac{3}{1 - س + س^2 2}$

ملحوظة

(أ) $أ + ب$ | $2(أ + ب)$، $3(أ + ب)$

3 ، 2

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقامات
$= (أ + ب) \times 2 \times 3$
$= 6(أ + ب)$

(ب) $أ + ب$ | $(أ - ب)(أ + ب)$، $(أ + ب)^2$

$(أ - ب)$، 1

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقامات
$= (أ + ب)(أ - ب) \times 1$
$= (أ + ب)(أ - ب)$

(جـ) $1 - س2$ | $1 - س2$، $(1 - س2)(1 + س)$

$1 + س$ ، 1

∴ المضاعف المشترك الأدنى للمقامات
$= (1 - س2) \times 1 \times (1 + س)$
$= (1 - س2)(1 + س)$

(أ) $\frac{1}{2أ + 2ب} - \frac{1}{3أ + 3ب} = \frac{1}{2(أ + ب)} - \frac{1}{3(أ + ب)} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3(أ + ب)} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2(أ + ب)}$

$= \frac{3}{6(أ + ب)} - \frac{2}{6(أ + ب)} = \frac{3 - 2}{6(أ + ب)} = \frac{1}{6(أ + ب)}$

(ب) $\frac{1}{أ + ب} - \frac{2ب}{أ^2 - ب^2} = \frac{1}{أ + ب} - \frac{2ب}{(أ + ب)(أ - ب)}$

$= \frac{1 \times (أ - ب)}{(أ + ب)(أ - ب)} - \frac{2ب}{(أ + ب)(أ - ب)} = \frac{(أ - ب) - 2ب}{(أ + ب)(أ - ب)}$

$= \frac{أ + ب}{(أ + ب)(أ - ب)} = \frac{1}{أ - ب}$

(جـ) $\frac{2}{1 - س2} - \frac{3}{1 - س + س^2 2} = \frac{2}{1 - س2} - \frac{3}{(1 - س2)(1 + س)}$

$= \frac{2(1 + س)}{(1 - س2)(1 + س)} - \frac{3}{(1 + س)(1 - س2)} = \frac{2(1 + س) - 3}{(1 + س)(1 - س2)}$

$= \frac{2 - 2س - 3}{(1 + س)(1 - س2)} = \frac{-1 - 2س}{(1 + س)(1 - س2)} = \frac{1}{1 + س}$

1- أوجد المضاعف المشترك الأدنى لكل مما يأتي:

(أ) $أ^2 5$، $أ$

(ب) $ب^2 - 2ب$، $ب$

(جـ) $م^2 - 9$، $م^2 2 + 6$

(د) $4ن^2 - 9$، $4ن + 6$

(هـ) $س + 3$، $س^2 + 6س + 9$

(و) $س^2 - 4س + 4$، $3س - 6$

(ز) $س^2 - 3س + 2$، $س - 2$

(ح) $2س^2 + 5س - 12$، $4س - 6$

2- بسط واختصر كلًّا مما يأتي ككسر وحيد:

(أ) $\frac{5}{أ} + \frac{2}{أ}$ (ب) $\frac{4}{س} - \frac{3}{س5}$

(جـ) $\frac{3}{م} - م2$ (د) $\frac{3}{ن} - \frac{ن}{4}$

(هـ) $\frac{1}{هـ^2 3} - \frac{1}{هـ}$ (و) $\frac{1}{ى2} + \frac{5}{ن6}$

(ز) $\frac{4}{س3ص} + \frac{1}{ص2}$ (ح) $\frac{هـ}{ك} - \frac{ك}{هـ}$

3- عبر عما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة.

(أ) $\frac{1}{س+3} - \frac{1}{س+2}$

(ب) $\frac{1}{س+4} + \frac{3}{(س+4)^2}$

(جـ) $\frac{4}{(س+3)(س+2)} - \frac{1}{س+2}$

(د) $\frac{2}{س-1} + \frac{3}{(س+2)(س-1)}$

(هـ) $\frac{1}{2ب-1} - \frac{2}{3ب-1}$

(و) $\frac{2}{ب+1} + \frac{1}{ب^2-1}$

(ز) $\frac{1}{م+3} - \frac{2}{9-م^2}$

(ح) $\frac{1}{3+س5-س2^2} - \frac{2}{3-س2}$

4- اختصر بقدر الإمكان:

$\frac{4}{(س+3)(س+5)} + \frac{2}{س+5}$

5- عبر عن الآتي في صورة كسر وحيد.

$\frac{2}{س+4} + \frac{3}{2-س}$

6- عبر عما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة.

(أ) $\frac{4}{5} + \frac{1}{1-2ل}$

(ب) $\frac{ص}{3+2ص} + \frac{1}{3-2ص}$

(جـ) $\frac{4}{س} - \frac{3}{س-ص}$

(د) $\frac{2}{3+ك} - \frac{5}{1-ك}$

(هـ) $\frac{2}{1+2ت} - \frac{3}{1-3ت}$

(و) $\frac{2}{3+ب} - \frac{ب}{5-ب}$

(ز) $\frac{2}{3+ك4} - \frac{1}{2-ك}$

(ح) $\frac{4}{3-س2} - \frac{3}{2+س}$

6-1 المعادلات التي تتضمن كسورًا جبرية Equations Involving Algebraic Fractions

إذا أردنا حل المعادلة $\frac{س-1}{2} = \frac{س}{3}$ والتي تتضمن كسورًا جبرية، علينا ضرب كلا الطرفين في المقامات.

ملحوظة

لدينا $\frac{س}{3} = \frac{س-1}{2}$

اضرب كلا الطرفين في المقام 2

بمعنى، $2 \times \frac{س}{3} = {}^{1}2 \times \frac{س-1}{2_1}$

$س - 1 = \frac{2}{3} س$

اضرب كلا الطرفين في المقام 3

$3 \times (س - 1) = {}^{1}3 \times \frac{2}{3_1} س$

$3(س - 1) = 2س3$

$3س - 3 = 2س$

$3س - 2س = 3$

$س = 3$

يمكن استبدال الخطوات ذات علامة (*) بعمليات حسابية ذهنية أقصر:

$\frac{س}{3} \times \frac{س-1}{2}$ (الضرب التبادلي)

$3(س - 1) = 2س$

$3س - 3 = 2س$

$3س - 2س = 3$

$س = 3$

إن الأسهم ذات علامة ✕ للإرشاد فقط. وبعد الممارسة لن تهتم بالأسهم.

حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{3}{4} = \frac{1}{2س}$ (ب) $\frac{3}{4س} = \frac{س}{3}$ (جـ) $\frac{1}{3 - 2س} = \frac{2}{4 - 3س}$

ملحوظة

(جـ) ضرب تبادلي

(أ) $\frac{3}{4} = \frac{1}{2س}$

$3 \times 2س = 4 \times 1$

$6س = 4$

$س = \frac{4}{6}$

$\therefore س = \frac{2}{3}$

(ب) $\frac{3}{4س} = \frac{س}{3}$

$4س \times س = 3 \times 3$

$4س^2 = 9$

$س^2 = \frac{9}{4}$

$س = \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$

$س = \pm \frac{3}{2}$

(جـ) $\frac{1}{3 - 2س} = \frac{2}{4 - 3س}$

$2(3 - 2س) = 1(4 - 3س)$

$6 - 4س = 4 - 3س$

$6 - 4 = 4س - 3س$

$2 = س$

حل المعادلة الآتية: $3 = \frac{1}{3 - أ} + \frac{4}{2 - أ}$

ملحوظة

عبر عن الكسور الجبرية بنفس المقام باستخدام المضاعف المشترك الأدنى

فك المعادلة $(3 - أ)(2 - أ)$

$3 = \frac{1}{3 - أ} + \frac{4}{2 - أ}$

$3 = \frac{1 \times (2 - أ)}{(3 - أ)(2 - أ)} + \frac{4 \times (3 - أ)}{(3 - أ)(2 - أ)}$

$3 = \frac{(2 - أ)1 + (3 - أ)4}{(3 - أ)(2 - أ)}$

$3 = \frac{2 - أ + 12 - 4أ}{(3 - أ)(2 - أ)}$

$\frac{3}{1} = \frac{14 - 5أ}{(3 - أ)(2 - أ)}$

اضرب تبادليًّا

$14 - 5أ = (3 - أ)(2 - أ)3$

$14 - 5أ = (6 + 5أ - أ^2)3$

$14 - 5أ = 18 + 15أ - 3أ^2$

طبيعي سوف يساوي المقدار صفر

$14 + 5أ - 18 + 15أ - 3أ^2 =$ صفر

حلل

$-8أ$	-8	$3أ$
$-12أ$	-4	$أ$
$-20أ$	$+32$	$-3أ^2$

أعد الكتابة كما يلي: $-20أ - 3أ^2 + 32 =$ صفر

$\therefore (4 - أ)(8 - 3أ) =$ صفر

إما $8 - 3أ =$ صفر أو $4 - أ =$ صفر

$\therefore 3أ = 8$ أو $أ = 4$

$أ = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \Leftarrow$

$\therefore أ = 2\frac{2}{3}$ أو 4

حل المعادلة : $\frac{م}{1-م} + \frac{1-م}{1+م} = \frac{7}{3}$.

$$\frac{7}{3} = \frac{م}{1-م} + \frac{1-م}{1+م}$$
$$\frac{7}{3} = \frac{(1+م)م}{(1-م)(1+م)} + \frac{(1-م)(1-م)}{(1-م)(1+م)}$$
$$\frac{7}{3} = \frac{(1+م)م + (1-م)(1-م)}{(1-م)(1+م)}$$
$$\frac{7}{3} = \frac{م + م^2 + 1 + م2 - م^2}{(1-م^2)}$$
$$\frac{7}{3} = \frac{1 + م - م^2 2}{(1-م^2)}$$
$$(1-م^2)7 = (1+م-م^2 2)3$$
$$7 - م^2 7 = 3 + م3 - م^2 6$$
$$م^2 6 - 7 - م^2 7 + م3 + 3 = صفر$$

أعد كتابة المعادلة كما يلي: $م^2 + م3 - 10 =$ صفر

$\therefore$ (م + 5)(م − 2) = صفر

$\therefore$ م + 5 = صفر أو م − 2 = صفر

$\therefore$ م = −5 أو م = 2

ملحوظة

لاحظ فك القوس

$(م - 1)^2 = م^2 - م2 + 1$

$(م + 1)(م - 1) = م^2 - 1$

لاحظ ضرب الأقواس

1- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{2}{أ3} = \frac{4}{5}$ (ب) $\frac{م}{2} = \frac{3}{4}$

(جـ) $\frac{س2}{3} = \frac{3}{س2}$ (د) $\frac{ن}{2} = \frac{8}{ن9}$

(هـ) $\frac{س2-1}{5} = \frac{س}{3}$ (و) $\frac{س+3}{4} = \frac{4-س2}{3}$

(ز) $\frac{3}{5+س4} = \frac{2}{4-س3}$ (ح) $\frac{4}{2-س3} = \frac{3}{1-س2}$

2- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{2}{أ-1} = \frac{1}{3}$ (ب) $م = \frac{1}{1-م2}$

(جـ) $1-أ = \frac{8}{1+أ}$ (د) $\frac{2}{1-ن} = 1+ن2$

(هـ) $\frac{س-2}{3} - \frac{س-3}{4} = \frac{1}{2}$

(و) $\frac{3}{1-ص2} + \frac{5}{1+ص2} = 2$

(ز) $\frac{14}{ن+2} - \frac{5}{ن} = 1$

(ح) $\frac{هـ+1}{هـ-1} - \frac{هـ-1}{هـ} = \frac{5}{2}$

3- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4أ}$ (ب) $\frac{م+1}{2} - 1 = \frac{1}{م}$

(جـ) $\frac{ص+4}{2} = \frac{3}{1+ص} + 2$

(د) $\frac{1}{(ن-1)^2} - \frac{1}{ن-1} = \frac{2}{9}$

(هـ) $\frac{3}{4-س^2} + \frac{6}{س+2} = \frac{5}{4}$

(و) $\frac{4}{(3+س)^2} + \frac{2}{3+س} = \frac{3}{4}$

(ز) $\frac{4}{(س-3)(5+س)} - \frac{6}{5+س} = \frac{4}{3}$

(ح) $\frac{1}{(3-س)(2-س)} + \frac{1}{3-س} = \frac{3}{2}$

4- حل المعادلة: $\frac{2}{ن} - 3 = 2$

5- حل المعادلات :

(أ) $\frac{7}{ص} = \frac{5}{1-ص}$ (ب) $2\frac{1}{2} = \frac{ع}{3} - \frac{ع3}{4}$

(جـ) $\frac{ن}{9} = \frac{4}{ن}$ (د) $\frac{4}{س} = 1 + \frac{10}{س3}$

7-1 المعالجات بالصيغ الرياضية Manipulation with Formulae

تعطي المعادلة حـ = 2 π ن قاعدة عامة لإيجاد محيط الدائرة حـ للدائرة التي طول نصف قطرها ن.

المعادلة التي تعطي قاعدة عامة لنوع معين من المشكلات تسمى صيغة رياضية.

ويكون من الملائم غالبًا **تحويل** أية صيغة رياضية، بمعنى استخدام الصيغة الرياضية للتعبير عن **متغير** مختلف.

تأمل المعادلة حـ =2πن. المتغير التابع هو حـ. إلا أننا إذا قسمنا الطرفين على 2π، نحصل على

$$\frac{\text{حـ}}{2\pi} = \frac{2\pi\text{ن}}{2\pi}$$

∴ ن = $\frac{\text{حـ}}{2\pi}$ (الآن أصبح ن هو الموضوع أو المتغير التابع).

وبذلك نكون قد حولنا الصيغة لجعل ن هي المتغير التابع. ولتحويل الصيغ الرياضية استخدم نفس القواعد التي استخدمتها في حل المعادلات:

1- لحذف الحد السالب من أحد الطرفين، أضف المكافئ الموجب لهذا الحد لكلا الطرفين.
2- لحذف الحد الموجب من أحد الطرفين، أضف المكافئ السالب لهذا الحد لكلا الطرفين.
3- لحذف المقام من أحد الطرفين، اضرب الطرفين في المقام.
4- لحذف المعامل من أحد الطرفين، اقسم كلا الطرفين على المعامل.
5- لحذف $\sqrt{\ }$ من أحد الطرفين، ربع كلا الطرفين.
6- لحذف التربيع من أحد الطرفين، خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين.

حول الصيغ الرياضية كما هو مطلوب.

(أ) ل = أ - د	اجعل أ التابع
(ب) د = $\frac{\text{ك}}{\text{ن}}$	اجعل ك التابع
(جـ) د = 2 (ل + ب)	اجعل ل التابع
(د) س = $\sqrt{\text{ت}}$	اجعل أ التابع
(هـ) ع = م حـ^2	اجعل حـ التابع

ملحوظة

(أ) نضيف + ء إلى طرفي المعادلة.

(ب) نضرب طرفي المعادلة × ن

(جـ) الخطوة 1:
نقسم كلا الطرفين على 2
الخطوة 2:
نطرح ب من كلا الطرفين.

(د) نقوم بتربيع كلا الطرفين.

(هـ) الخطوة 1:
نقسم كلا الطرفين على م .
الخطوة 2:
نحسب الجذر التربيعي لكلا الطرفين.

(أ) $ل = أ - د$

$ل + د = أ - د + د$

$ل + د = أ$

$\therefore أ = ل + د$

(ب) $د = \frac{م}{ن}$

$د ن = م$

$\therefore م = د ن$

(جـ) $ء = 2(ل + ب)$

$\frac{ء}{2} = \frac{2^{1}(ل + ب)}{1 2}$

$\frac{ء}{2} = ل + ب$

$\frac{ء}{2} - ب = ل + ب - ب$

$\frac{ء}{2} - ب = ل$

$\therefore ل = \frac{ء}{2} - ب$

(د) $س = \sqrt{أ}$

$س^2 = (\sqrt{أ})^2$

$س^2 = أ$

$\therefore أ = س^2$

(هـ) $ح = م ح^2$

$\frac{ح}{م} = \frac{م^{1} ح^2}{م_{1}}$

$\frac{ح}{م} = ح^2$

$\therefore ح^2 = \frac{ح}{م} \therefore ح = \pm\sqrt{\frac{ح}{م}}$

إذا كان $ن = \sqrt{2أ ذ}$

(أ) المطلوب إيجاد قيمة ذ من المعادلة [اجعل ذ متغيرًا تابعًا].

(ب) إيجاد قيمة ذ عندما $أ = 10$ ، $ن = 30$

(أ) $ن = \sqrt{2أ ذ}$

$ن^2 = 2أ ذ$

$\frac{ن^2}{2أ} = \frac{2أ ذ}{2أ}$

$\frac{ن^2}{2أ} = ذ$

(ب) قيمة ذ عندما $أ = 10$ ، $ن = 30$

$ذ = \frac{ن^2}{2أ}$

$= \frac{(30)^2}{10 \times 2}$

$= \frac{900}{20} = 45$

$\therefore ذ = 45$

1- غير الصيغ الرياضية الآتية كما هو محدد:

(أ) $حـ = سـ - ذ$ ، $سـ = ؟$

(ب) $ف = ى + حـ$ ، $ى = ؟$

(جـ) $ر = \frac{ن}{ط}$ ، $ن = ؟$

(د) $ى = ن ط$ ، $ن = ؟$

(هـ) $ن = \sqrt{\frac{2ح}{م}}$ ، $ح = ؟$

(و) $ك = ط ع^2$ ، $ع = ؟$

(ز) $ن^2 - ى^2 = 2أ ذ$ ، $ن = ؟$

(ح) $ن = \frac{1}{3} \pi ص^2 ح$ ، $ص = ؟$

2- إذا كانت $ل = \frac{د ر ت}{100}$

(أ) اجعل (ر) متغيرًا تابعًا.

(ب) أوجد قيمة (ر) عندما ل = 15، د = 50، ت = 3

3- إذا كان الحجم ى لأسطوانة نصف قطرها ص وارتفاعها هـ يعطي العلاقة $ى = \pi ص^2 هـ$.

(أ) عبر عن ص بدلالة ى، π ، هـ

(ب) معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$، أوجد قيمة ص عندما ى = 176، هـ = 14

4- إذا كانت $أ = \frac{ك}{\sqrt{ع}}$

(أ) اجعل ع متغيرًا تابعًا.

(ب) أوجد قيمة ع عندما ك = 10، أ = 5

5- إذا كانت $ذ = \frac{3}{ت - 2}$، عبر عن ت بدلالة ذ.

6- إذا كان $\frac{أ}{أ + 2} = ب$ عبر عن أ بدلالة ب.

7- إذا كانت $هـ = \frac{3ى^2}{8ف}$

(أ) احسب مقدار هـ عندما ى = 40.97، ف = 9.81

(ب) عبر عن ى بدلالة هـ، ف.

8- إذا كانت $ص = \frac{ت + أ}{ت - ب}$ عبر عن ت بدلالة أ، ب، ص.

9- إذا كانت $ع = 4\sqrt{\frac{هـ}{2}}$

(أ) اجعل هـ متغيرًا تابعًا.

(ب) أوجد قيمة هـ عندما ع = 16

10- تحسب المسافة ع بالكيلو مترات التي يستطيع شخص رؤيتها عندما يكون على ارتفاع هـ بالمتر فوق مستوى سطح الأرض بالصيغة الرياضية $ع = 8\sqrt{\frac{هـ}{5}}$ أوجد

(أ) المسافة التي يمكن لشخص رؤيتها إذا كان على ارتفاع 45 مترًا فوق سطح الأرض.

(ب) ما الارتفاع الذي يجب أن يكون عليه الشخص ليتمكن من رؤية مسافة 16كم.

11- تحسب المساحة السطحية لمخروط مصمت بالصيغة الرياضية $أ = \pi ص^2 + \pi ص ل$.

(أ) حلل المقدار $\pi ص^2 + \pi ص ل$.

(ب) أعد ترتيب الصيغة الرياضية لتعبر عن ل بدلالة π، ص، أ.

12- إذا كانت $حـ = \frac{1 + ع2}{1 - ع3}$

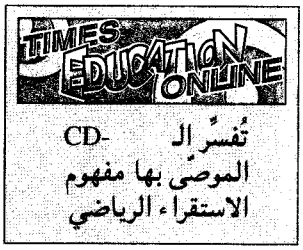
(أ) احسب قيمة حـ عندما $ع = \frac{1}{4}$

(ب) عبر عن ع بدلالة حـ.

13- اجعل ك متغيرًا تابعًا في الصيغة $حـ = \frac{ك^2 + هـ^2}{هـ}$

8-1 المتتابعات والصيغ الرياضية Sequences and Formulae

نتعلم في دراستنا لتسلسل الأعداد استخراج النمط من مجموعة الأعداد المعطاة. ومن ثم نقوم بعمل تعميم حول مجموعة الأعداد بتحديد الحد العام في صورة جبرية والذي يوضح لنا كيفية نمو المتتابعة.



تُفسِّر الـ CD- الموصى بها مفهوم الاستقراء الرياضي

مهارات التفكير : استقراء

يستطيع الطلبة في نهاية هذا النشاط استخدام إستراتيجيات "رسم الأشكال، وإعداد قوائم منظمة، والبحث عن النمط" للوصول إلى الحد العام في التسلسل العددي عن طريق الاستقراء.

1- فيما يلي نشاط يستخدم عيدان الثقاب (أو عيدان تخليل الأسنان) لبناء وتوسيع الأنماط العددية.

مثلث واحد مثلثان 3 مثلثات

ادرس الأنماط في الأشكال السابقة:

(أ) احسب عدد أعواد الثقاب في كل شكل.

(ب) كوِّن الشكلين التاليين.

(جـ) أوجد عدد أعواد الثقاب المطلوبة في الشكل الرابع والخامس.

ملحوظة: عدد أعود الثقاب في الشكل الرابع معلوم لدينا باسم الحد الرابع ، وكذلك يعرف عدد أعواد الثقاب في الشكل الخامس باسم الحد الخامس.

(د) حدد أعواد الثقاب اللازم إضافتها إلى

(i) الحد الثالث للحصول على الحد الرابع.

(ii) الحد الرابع للحصول على الحد الخامس.

(هـ) أكمل وانقل الجدول التالي.

الحد	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
عدد أعواد الثقاب	3	5			

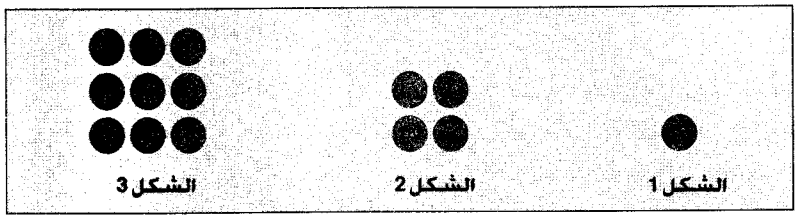
(و) اذكر نوع الأعداد التي يمثلها عدد أعواد الثقاب.

(ز) حدد عدد أعواد الثقاب في الشكل الذي يحتوي على 10 مثلثات (بمعنى الحد العاشر) بدون رسم الشكل.

(ح) حدد عدد أعواد الثقاب في الحد النوني بدلالة (ن) في أبسط صورة.
(قد يساعدك الجدول التالي في الحل).

الحد	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس
عدد أعواد الثقاب	3	2+3	(2)2+3	(2)3+3	(2)4+3	؟

2- فيما يلي نشاط يستخدم حبات خرز يقودنا لاستكشاف نوع آخر من الأعداد.



(أ) ارسم الشكل التالي.

(ب) انقل وأكمل الجدول التالي.

عدد الصفوف في كل شكل	1	2	3	4
عدد الخرزات	1	4		

(جـ) اذكر نوع الأعداد الذي يمثلها عدد الخرزات.

(د) بدون رسم أشكال أخرى. اكتب فيما يلي عدد حبات الخرز في الشكل الذي له.

(i) 10 صفوف (ii) 25 صفًّا

(هـ) اكتب المعادلة التي تعبر عن (ب) بدلالة (ر) حيث ب عدد الخرزات في الشكل الذي له (ر) من الصفوف.

مثال 2:

(أ) الحد النوني من متتابعة الأعداد هو $2^{ن} - 1$، اكتب فيما يلي الحدود الأربعة الأولى من هذا التتابع.

(ب) الحدود الأربعة الأولى من متتابعة أخرى هي 1، 3، 5، 7، ..... اكتب فيما يلي مقدارًا بدلالة ن للحد النوني لهذه المتتابعة.

الحل

(أ) عندما ن = 1، $2^{ن} - 1 = 2^{1} - 1 = 1$

ن = 2، $2^{ن} - 1 = 2^{2} - 1 = 3$

ن = 3، $2^{ن} - 1 = 2^{3} - 1 = 7$

ن = 4، $2^{ن} - 1 = 2^{4} - 1 = 15$

∴ الحدود الأربعة الأولى هي 1، 3، 7، 15، .....

لاحظ أن:

الحد الثاني = 3 = 1 + 2 = 1 + 1 (2) = 1 + (2 - 1) × 2

الحد الثالث = 5 = 1 + 4 = 1 + 2 (2) = 1 + (3 - 1) × 2

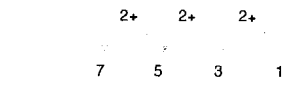
الحد الرابع = 7 = 1 + 6 = 1 + 3 (2) = 1 + (4 - 1) × 2

الحد ن = 2 (ن - 1) + 1

= 2ن + 1 - 2

= 2ن - 1

ملحوظة



لاحظ أنه في السؤال (1) من النشاط ص23، المتتابعة 3، 5، 7، 9 حدها النوني = 2ن + 1

للتأكد: عندما ن = 1 ، 2ن - 1 = 2 (1) - 1 = 1

ن = 2 ، 2ن - 1 = 2 (2) - 1 = 3

ن = 3 ، 2ن - 1 = 2 (3) - 1 = 5

ن = 4 ، 2ن - 1 = 2 (4) - 1 = 7

1- حدد الحد الخامس في المتتابعات العددية الآتية:

(أ) 1، 3، 5، 7، 9، 11، 13، ...

(ب) 5، 10، 15، 20، 25، 30، ...

(جـ) 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، ...

(د) -6، -4، -2، 0، 2، 4، ...

2- أكمل كُلًّا من الأنماط العددية التالية بإعطاء العدد التالي. حدد بكلماتك ماذا تعتقد أن تكون قاعدة كل نمط. النمط الأول تم عمله لإرشادك.

(أ) 3، 5، 7، 9، ..... قاعدة النمط هي إضافة 2 للحصول على العدد التالي.

(ب) 19، 16، 13، 10، .....

(جـ) 5، 20، 80، 320، .....

(د) 160، 80، 40، 20، 10، .....

(هـ) 1، 3، 6، 10، .....

(و) 1، 4، 9، 16، .....

(ز) 1، 8، 27، 64، .....

(ح) 60، 140، 240، 360، .....

(ط) 2، 8، 18، 32، 50، .....

(ى) 1، 1، 2، 3، 5، 8، 13، .....

(ملاحظة: تعرف الأعداد في "ى" بأعداد فيبوناتشي).

3- انقل وأكمل الرقم المفقود:

(أ) 7، 4، 1، -2، ..... ، - 8، - 11

(ب) -2، 4، -8، 16، ..... ، ..... ، - 128

(جـ) 2، 5، 10، ..... ، ..... ، 37

(د) ..... ، 37، 50، ..... ، 82، 101.

(هـ) 1، 2، 4، ..... ، 10، ..... ، 16، 18

(و) 1، 1، 1، 3، 5، 9، ..... ، 31، 57.

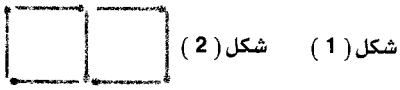
(ز) 1، 2، 6، 15، ..... ، ..... ، 92، 141

(ح) 3، 5، 8، 13، ..... ، 31، 44

(ط) 3، 9، 27، ..... ، 243، 729.

(ى) 1، 8، 27، ..... ، 125، 216.

4- ادرس الأشكال التالية المتضمنة مربعات باستخدام عيدان الثقاب.



شكل (3)

(أ) ارسم الشكلين التاليين.

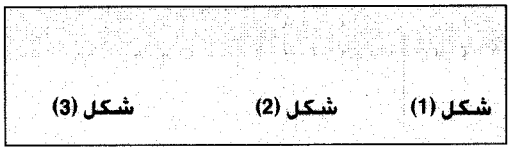
(ب) انقل وأكمل الجدول التالي.

الشكل	1	2	3	4	5
عدد الثقاب	4	7			

(جـ) بدون استخدام رسوم أخرى. أوجد عدد عيدان الثقاب المستخدمة في
(i) الشكل 10 (ii) الشكل 20

(د) اكتب فيما يلي عدد عيدان الثقاب بدلالة (ن) في أبسط صورة للشكل (ن).

5- يتكون كل شكل في المتتابعة التالية من عدد من الخرز. 4ن + 1، ن = 1، 2، 3، .....



(أ) ارسم الشكل (4) من المتتابعة.

(ب) انقل وأكمل الجدول التالي.

الشكل	1	2	3	4
عدد الخرز	5	9		

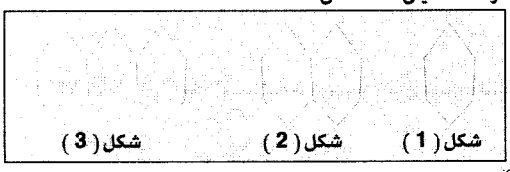
(جـ) بدون رسم الشكل، أوجد عدد الخرز في
(i) شكل 10 (ii) الشكل 100.

(د) اكتب فيما يلي عدد الخرز بدلالة ن في أبسط صورة للشكل (ن).

(هـ) أي شكل يحتوي على 189 خرزة.

5 ن + 1، ن = 1، 2، 3، .....

6- يتكون كل شكل في المتتابعات التالية من عدد من أعواد تخليل الأسنان.



(أ) ارسم الشكل 4 في المتتابعة.

(ب) انقل وأكمل الجدول التالي.

الشكل	1	2	3	4
عدد العيدان	6	11		

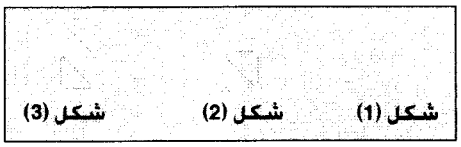
(جـ) باعتبار النمط العددي وبدون رسم أشكال أخرى اكتب فيما يلي عدد أعواد تخليل الأسنان في
(i) الشكل 10 (ii) الشكل 55.

(د) عدد أعواد تخليل الأسنان في الشكل (ن) هي (ت) اكتب معادلة تعبر عن (ت) بدلالة (ن) في أبسط صورة.

(هـ) أي شكل يحتوي على
(i) 101 عود تخليل أسنان.
(ii) 166 عود تخليل أسنان.

(و) وضح لماذا العدد 1000 لا ينتمي إلى المتتابعة.

7- ادرس الأشكال التالية التي تكونت من النقط وعلامة التقاطع ن^2 − 1، ن = 1، 2، 3، .....



(أ) ارسم الشكل التالي.

(ب) انقل وأكمل الجدول التالي.

الشكل	1	2	3	4
عدد النقط	0	3		

(جـ) بدون رسم أشكال أخرى، اكتب عدد النقط في
(i) الشكل 10 (ii) الشكل 25

(د) اكتب عدد النقط بدلالة ن للشكل النوني.

(هـ) اكتب رقم الشكل الذي له 399 نقطة.

8- الحدود الأربعة الأولى من متتابعة هي 1، 7، 13، 19. اكتب

(أ) الحد الخامس

(ب) الحد العاشر.

(جـ) الحد النوني بدلالة ن

(د) أي حد يساوي 139.

9- الحدود الأربعة الأولى من متتابعة هي 6، 13، 20، 27 .

(أ) اكتب الحد العاشر.

(ب) الحد النوني (7ن + ك) . فأوجد قيمة (ك).

(جـ) أي حد يساوي 2 001؟

(د) أوجد قيمة حد هذه المتتابعة الأقرب إلى العدد 4 002 .

10- اكتب الحد التالي في المتتابعة صفر، 3، 8، 15، 24، 35 .....

11- (أ) اكتب فيما يلي الحدين التاليين في المتتابعة 12، 11، 9، 6، .....

(ب) اكتب فيما يلي تعبيرًا بدلالة ن للحد النوني في المتتابعة 4، 9، 16، 25، .....

12- متتابعة من الأعداد 1، 5، 11، 19، 29..... يمكن أيضًا التعبير عنها بالصورة

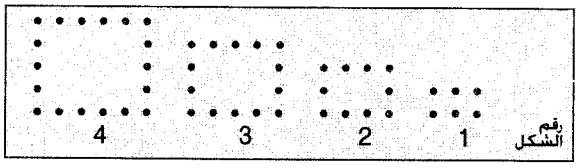
1^2 + صفر، 2^2 + 1 ، 3^2 + 2 ، 4^2 + 3 .....

(أ) عبر عن الحد الخامس بنفس الشكل .

(ب) اكتب فيما يلي بدلالة ن الصيغة الرياضية للحد النوني.

(جـ) احسب قيمة الحد المائة في هذه المتتابعة .

13- يتكون كل شكل في هذه المتتابعة من عدد من النقاط.



(أ) ارسم الشكل الخامس في هذه المتتابعة.

(ب) انقل وأكمل الجدول التالي.

الشكل	1	2	3	4	5
عدد النقاط	6	10			

(جـ) باعتبار الأنماط العددية وبدون رسم أشكال أخرى. اكتب فيما يلي عدد النقط التي سوف تكون

(i) في الشكل 10

(ii) في الشكل 500 .

(د) اكتب فيما يلي رقم الشكل الذي يحتوي على 70 نقطة.

عدد النقاط في الشكل النوني حددت بالعدد س.

اكتب فيما يلي معادلة يمكن من خلالها التعبير عن س بدلالة ن.

14- (أ) الحدود الأربعة الأولى من متتابعة هي 8، 13، 18، 23 .

(i) اكتب فيما يلي الحد العاشر.

(ii) الحد النوني هو 5ن + ك أوجد قيمة ك.

(ب) الحد النوني لمتتابعة أخرى 7ن - 1. أوجد قيمة الحد الأقرب من 1999 في هذه المتتابعة.

15- (أ) الحد النوني في متتابعة من الأعداد هو $ن^2$ + 3. اكتب الحدود الأربعة الأولى من هذه المتتابعة.

(ب) الحدود الأربعة الأولى من متتابعة أخرى هي صفر، 3، 8، 15، ..... اكتب تعبيرًا بدلالة ن للحد النوني لهذه المتتابعة.

ادرس الجدول التالي :

تسلسل	المجموع (ذ)	الحد الأخير ن	ن+1	ن (ن+1)
2 + 1	3	2	3	6
3 + 2 + 1	6	3	4	12
4 + 3 + 2 + 1	10	4	5	20
5 + 4 + 3 + 2 + 1	15	5	6	30

(أ) اكتب فيما يلي العلاقة (الصيغة الرياضية) التي تربط ذ مع ن (ن + 1).

(ب) استخدم الصيغة الرياضية من (أ) لإيجاد قيمة
1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100.
(جـ) أوجد الحد الأخير من المتتابعة
1 + 2 + 3 + 4 + ... + ن والذي مجموعه 1 275.

الحل

(أ) لاحظ أن كل قيمة في العمود (ذ) دائمًا نصف القيمة المناظرة لها في العمود ن (1 + ن).
$\therefore$ ذ = $\frac{1}{2}$ ن (1 + ن)

(ب) الحد الأخير ن = 100
$\therefore$ ذ = $\frac{1}{2}$ (100) (1 + 100)
= 5 050

(جـ) إذا كانت ذ = 1275
$\therefore$ $\frac{1}{2}$ ن (1 + ن) = 1275
ن (1 + ن) = 2 (1275)
$ن^2$ + ن = 2550
$ن^2$ + ن − 2550 = صفر
(ن − 50) (ن + 51) = صفر
ن − 50 = صفر أو ن + 51 = صفر
ن = 50 أو ن = −51 (مرفوضة حيث ن < صفر)
$\therefore$ الحد الأخير = 50

مثال 23

تأمل النمط التالي:
$1 + 1 = 2 = {}^2\left(\frac{1+1}{2}\right)$
$1 + 3 + 1 = 4 = {}^2\left(\frac{3+1}{2}\right)$
$1 + 5 + 3 + 1 = 9 = {}^2\left(\frac{5+1}{2}\right)$
$1 + 7 + 5 + 3 + 1 = 16 = {}^2\left(\frac{7+1}{2}\right)$
$1 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25 = {}^2\left(\frac{9+1}{2}\right)$
(أ) اكتب فيما يلي الخط التالي في النمط.
(ب) أوجد قيمة 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 19.
(جـ) إذا كان 1 + 3 + 5 + 7 + ... + ك = 144 أوجد قيمة ك.
(د) اكتب قيمة 1 + 3 + 5 + 7 + ... + ن بدلالة ن

الحل

(أ) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = {}^2\left(\frac{11+1}{2}\right)$

(ب) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots = 19 + \left(\frac{1+19}{2}\right)^2 = {}^2 10 = 100$

(جـ) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + ك = 144$

$${}^2\left(\frac{ك+1}{2}\right) = 144 = {}^2 12$$

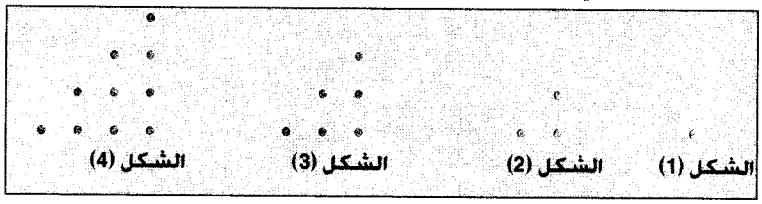
$$\frac{ك+1}{2} = 12$$

$$ك + 1 = 24$$

$$ك = 23$$

(د) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + ن = {}^2\left(\frac{ن+1}{2}\right)$

٢- يتكون كل شكل في المتتابعة التالية من عدد من الخرز في صورة مثلثية:



(أ) ارسم الشكل الخامس في المتتابعة.

(ب) انقل وأكمل الجدول التالي.

الشكل	1	2	3	4	5
عدد الخرز	1	3	6		

(جـ) حدد عدد الخرز المطلوب إضافته إلى:

(i) الشكل الثالث للحصول على الشكل الرابع.

(ii) الشكل الرابع للحصول على الشكل الخامس.

(د) بدون رسم أي أشكال أخرى حدد عدد الخرز في الشكل العاشر.

(هـ) اكتب فيما يلي عدد الخرز بدلالة ن بالنسبة للشكل النوني (انظر المثال 23).

2- ادرس الجدول التالي:

متتابعة	المجموع (ذ)	عدد الحدود (ن)	الحد الأخير (ل)	ن + 1	2ن (ن + 1)
4	4	1	4	2	4
4 + 8	12	2	8	3	12
4 + 8 + 12	24	3	12	4	24
4 + 8 + 12 + 16	40	ى	ط	ر	ذ

(أ) حدد قيمة ى، ط، ر، ذ.

(ب) عبر عن قيمة ل بدلالة ن.

(جـ) اكتب فيما يلي المعادلة التي تربط بين ذ، ن.

(د) كم عدد الحدود الموجودة في المتتابعة $4 + 8 + 12 + 16 + \ldots\ldots + 1200$؟

(هـ) استخدم المعادلة الناتجة في (ج) لإيجاد قيمة $4 + 8 + 12 + 16 + \ldots\ldots + 1200$.

3- ادرس النمط التالي:

الخط	المتتابعة
1	
2	$1^3 + 2^3 = 3^2 = 9$
3	$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2 = 36$
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2 = 100$

(أ) اكتب الخط الأول من النمط.

(ب) أوجد قيمة $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$.

(جـ) اكتب السطر الكامل الذي قيمة مجموعه 441.

(د) إذا كان $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + ن = \frac{ن}{2}(1 + ن)$، عبر عن القيمة $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots\ldots +$ $ن^3$ بدلالة ن.

4- ادرس النمط:

$1 = 1$

$8 = 5 + 3$

$27 = 11 + 9 + 7$

$64 = 19 + 17 + 15 + 13$

(أ) اكتب الصف الخامس من النمط.

(ب) إذا كان الصف النوني في النمط هو 133 + 135 + 137 + ... = 1728، أوجد قيمة ن.

(جـ) بدون جمع وموضحًا إجابتك، أوجد قيمة 73 + 75 .... + 89 .

5- باستخدام متتابعة فيبوناتشي

1، 1، 2، 3، 5، 8، 13، 21، 34، 55 .... والتي حددت حدودها بالحروف $ت_1$، $ت_2$، $ت_3$، $ت_4$، $ت_5$، .... إلخ .

انقل وأكمل ما يلي.

(أ) $1^2 + 1^2 = 2^2$ ——— $ت_1^2 + ت_2^2 = ت_2^2$ ——— بدلالة ت

(ب) $1^2 + 2^2 = 3^2$ ——— $ت_2^2 + ت_3^2 = ت_3^2$ ——— بدلالة ت

(جـ) $2^2 + 3^2 = 5^2$ ——— $ت_3^2 + ت_4^2 = ت_4^2$ ——— بدلالة ت

(د) $3^2 + 5^2 = 8^2$ ——— $ت_4^2 + ت_5^2 = ت_5^2$ ——— بدلالة ت

(هـ) $5^2 + 8^2 =$ ——— $ت_5^2 + ت_6^2 =$ ——— بدلالة ت

ثم اكتب العلاقة العامة بدلالة ت، ن حيث ت، يشير إلى الحد النوني في المتتابعة.

6- باستخدام الأنماط العددية، أكمل السطور (أ)، (ب)، (حـ) في الجدول.

$(4 + 3^2) \times 5 \times 1 = 16 - 3^4$

$(4 + 4^2) \times 6 \times 2 = 16 - 4^4$

$(4 + 5^2) \times 7 \times 3 = 16 - 5^4$

(أ) $= 16 - 6^4$

(ب) $(4 + 8^2) \times 10 \times 6 =$

(جـ) $= 16 - ن^4$

(ب) استخدم إجابتك عن الجزء (حـ) والمعلومات المعطاة فيما يلي لإيجاد العوامل الثلاثة الأولية للعدد 50 609

$(15)^2 = 225$، $(15)^4 = 50\ 625$).

7- سلسلة من الأشكال المظللة وغير المظللة (مثلثات صغيرة) مبينة فيما يلي. المثلثات المظللة هي التي يشترك أحد ضلعيها على الأقل مع أحد حروف المثلث الكبير. جميع المثلثات الصغيرة الأخرى غير مظللة.

شكل (1) شكل (2)

شكل (3) شكل (4)

انقل الجدول التالي الذي يوضح عدد المثلثات الصغيرة.

الشكل	1	2	3	4	5	ن
عدد المثلثات المظللة	3	6	9	س		
المجموع الكلي للمثلثات	4	9	16	25	ص	
عدد المثلثات غير المظللة	1	3	7			ع

(أ) أكمل عمود الشكل الرابع في الجدول.

(ب) مستخدمًا الأنماط العددية في جدولك

(i) أكمل عمود الشكل الخامس.

(ii) أوجد بدلالة ن مقادير س، ص، ع.

(جـ) أوجد المثلثات الصغيرة غير المظللة في الشكل 100.

8- يتم استقصاء عدد الأقطار (ك) التي يمكن رسمها في الشكل المضلع الذي عدد أضلاعه (ن).

عدد الأضلاع (ن)	3	4	5	6	7	8
عدد الأقطار (د)	0	2	5	9	د	ط

يبين الرسم والجدول عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المثلث، والشكل الرباعي، والخماسي، والسداسي.

(أ) برسم جميع الأقطار الممكنة أو باعتبار الأنماط العددية، أوجد قيمة ك، ط في الجدول.

(ب) من المعلوم أن الصيغة الرياضية ك = أ ن^2 + ب ن تعطي عدد الأقطار التي يمكن رسمها في مضلع عدد أضلاعه ن.

(i) باستخدام عدد الأقطار في المثلث والشكل الرباعي، وضح أن:

صفر = 3أ + ب، 1 = 8أ + 2ب

(ii) حل المعادلتين السابقتين آنيًا لإيجاد قيمتي أ، ب.

(iii) أوجد بعد ذلك عدد الأقطار في المضلع الذي له 20 ضلعًا.

9- يبين الجدول التالي جزءًا من نمط من الأعداد ومجموع هذه الأعداد في كل صف.

الصف	الأعداد					المجموع
1	1					1
2	3	5				8
3	7	9	11			27
4	13	15	17	19		ك
5						ط

(أ) اكتب فيما يلي قيمة ك.

(ب) اكتب فيما يلي جميع الأعداد في الصف الخامس ومجموعها ط.

(جـ) (i) كم عدد الأعداد التي تظهر في الصف ن؟

(ii) ما مجموع الأعداد في الصف ن.

(د) يمكن كتابة العدد الأول في الصف ن على الصورة ن^2 + أ ن + ب.

باستخدام بعض الأعداد في الجدول وبتكوين معادلات. أوجد قيمة أ، ب.

(هـ) راجع إجابتك [تأكد] بالنسبة لكل من أ، ب باستخدام العدد الأول في الصف السادس.

10- كُتِبَتْ الأعداد في خمسة أعمدة لتُكَوِّن النمط التالي.

	عمود$_1$	عمود$_2$	عمود$_3$	عمود$_4$	عمود$_5$
صف1	2	3	4	5	6
صف2	7	8	9	10	11
صف3	12	13	14	15	16
صف4	17	18	19	20	21
صف ن		ك	س		
صف ن + 1		ص	ح		

لاحظ أن ناتج عملية الضرب 2 × 8 = 16، 3 × 7 = 21 كلاهما يقع في العمود ع$_5$.

فإذا كانت الأعداد الأربعة ك، س، ص، ع تلي بعضها في النمط كما هو موضح بالشكل.

(أ) (i) باستخدام الجدول في الصفحة السابقة عبر عن س بدلالة ك، ص بدلالة ك، ح بدلالة ك.

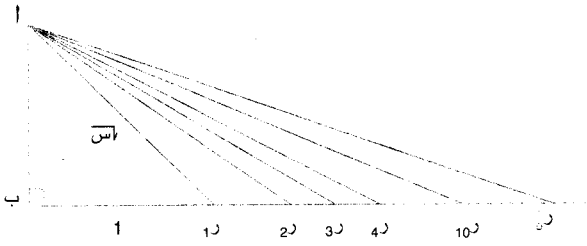
(ii) أوجد واختصر س ص - ك ح.

(iii) اشرح لماذا س ص، ك ح يقعان في نفس العمود.

(ب) العدد ك في الصف ن من العمود ع$_2$. أوجد تعبيرًا عن ك بدلالة ن.

(جـ) بالتعبير أيضًا عن كل من س، ص، ح بدلالة ن أو بأية طريقة أخرى وضح أن كلًّا من حاصل الضرب س ص، ك ح يقعان في العمود ع$_1$.

11- يبين الشكل التالي متتابعة من المثلثات قائمة الزاوية أ ب ر$_1$، أ ب ر$_2$، أ ب ر$_3$، ..... ارتفاع جميعها أ ب = 1



(أ) في المثلث الأول ب ر$_1$ = 1 فإذا كان أ ر$_1$ = $\sqrt{س}$. اثبت أن س = 2.

(ب) في المثلث الثاني ب ر$_2$ = أ ر$_1$، اثبت أن أ ر$_2$ = $\sqrt{3}$.

(جـ) إذا استمرت المتتابعة مع وجود ب ر$_3$ = أ ر$_2$، ب ر$_4$ = أ ر$_3$ وهكذا.

(i) اثبت أن ر$_1$ هي نقطة تنصيف ب ر$_4$.

(ii) أوجد أضلاع المثلث العاشر أ ب ر$_{10}$

أ ب = ——— ، ب ر$_{10}$ = ———

أ ر$_{10}$ = ——

(iii) اكتب فيما يلي بدلالة ن أضلاع المثلث النوني أ ب ر$_ن$.

أ ب = ——— ، ب ر$_ن$ = ———

أ ر$_ن$ = ———

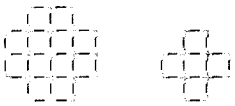
12- استخدمت سعاد بعض القش لتكوين أشكال ناقصة الأركان. وارتبط القش مع بعضه بثلاثة أنواع مختلفة من الروابط:

روابط ركنية

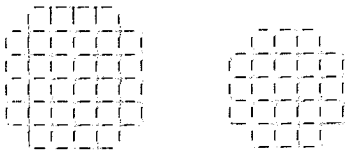
روابط جانبية .....

روابط منتصفة

تبين الأشكال (الرسوم) التالية أول أربعة أشكال كونتها.



شكل (1) شكل (2)



شكل (3) شكل (4)

يبين الجدول التالي أعداد أنواع الروابط المختلفة المستخدمة.

الشكل	1	2	3	4	5	.....	ن
عدد الترابط الركني	8	8				.....	حـ
عدد الترابط الجانبي	0	4	8			.....	ح
عدد الترابط من المنتصف	4	9				.....	م

(أ) انقل الجدول وأكمل الأعمدة بالنسبة لكل من الشكل الثالث والرابع.

(ب) بدراسة الأنماط العددية في جدولك. أكمل عمود النموذج 5.

(جـ) أوجد بدلالة ن. مقادير ما يلي:

(i) ح

(ii) م

(iii) عدد الروابط الكلي المطلوب للشكل النوني.

(د) أوجد العدد الكلي للروابط المطلوبة للشكل 50.

9-1 الحلول البيانية للمعادلات التربيعية Graphical Solutions of Quadratic Equations

تأمل المعادلة $س^2 - 5س + 6 = صفر$.

أكبر أس للمجهول س هو 2. مثل هذه المعادلة تسمى **معادلة تربيعية**. ولهذا أي معادلة على الصورة

$أ س^2 + ب س + حـ = صفر$

حيث (أ، ب، حـ ثوابت، $أ \neq 0$) تسمى معادلة تربيعية. ولقد تعلمنا حل المعادلة التربيعية عن طريق التحليل إلى عوامل.

مثال: $س^2 - 5س + 6 = صفر$

بمعنى $(س - 2)(س - 3) = صفر$

$\therefore$ س $- 2 = صفر$

أو س $- 3 = صفر$

$\therefore$ س $= 2$ أو 3

طريقة أخرى لحل المعادلة التربيعية هي رسم الشكل البياني التربيعي.

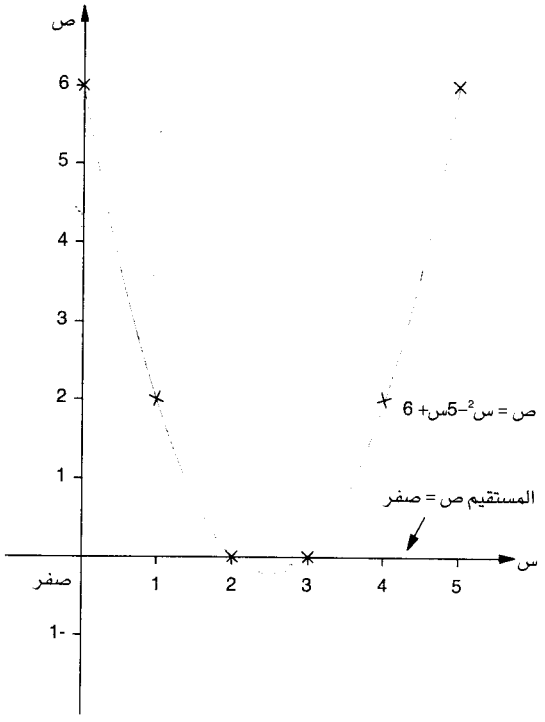
ملحوظة

الطرف الأيسر يجب أن يكون صفرًا

لحل المعادلة $س^2 - 5س + 6 = صفر$ نحتاج إلى رسم الشكل البياني للدالة $ص = س^2 - 5س + 6$. يمثل الجدول الآتي قيمة ص = $س^2 - 5س + 6$:

س	0	1	2	3	4	5
ص	6	2	0	0	2	6

ثم نرسم المعادلة ص = $س^2 - 5س + 6$ مستخدمين مقياس رسم 1 سم ليمثل وحدة واحدة على محوري السينات، الصادات.



المنحنى للعلاقة ص = س^2 - 5س + 6 ..... (1)

من س^2 - 5س + 6 = صفر

لدينا ص = صفر ..... (2)

تذكر أن الحل البياني للمعادلتين الخطيتين الآنيتين يعطى عن طريق نقطة تقاطع المستقيمين، وبالمثل سوف نحل المعادلتين الآنيتين (1)، (2) بإيجاد نقطة أو نقط التقاطع للمنحنى (1) والمستقيم (2).

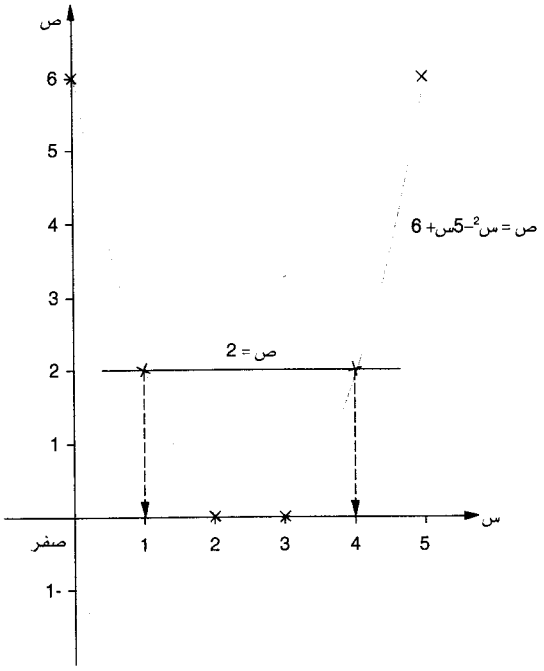
نحصل على نفس النتيجة من التحليل

من الرسم، ص = صفر يقطع المنحنى ص = س^2 - 5س + 6 فى النقطتين عندما س = 2، س = 3.

لذا حل المعادلة س^2 - 5س + 6 = صفر يكون س = 2 ، س = 3

س =2، س = 3 يعرفان أيضًا باسم جذور المعادلة التربيعية س^2 - 5س + 6 = صفر

بالمثل لحل المعادلة س^2 - 5س + 6 = 2، علينا إيجاد الإحداثي السيني للنقط التي يقطع فيها المنحنى ص = س^2 - 5س + 6 الخط المستقيم ص = 2



من الرسم، ص = 2 تقطع ص = س^2 - 5س + 6 في النقط حيث س = 1، س = 4 ولهذا فإن حل المعادلة س^2 - 5س + 6 = 2 يكون س = 1، س = 4 .

تذكر أنه لحل المعادلة التربيعية عن طريق التحليل فإن الطرف الأيسر يجب أن يكون دائمًا صفرًا.

يمكن التأكد عن طريق التحليل.

س^2 - 5س + 6 = 2

∴ س^2 - 5س + 6 - 2 = صفر

س^2 - 5س + 4 = صفر

(س - 4) (س - 1) = صفر

س - 4 = صفر أو س - 1 = صفر

∴ س = 4 أو س = 1

الحل البياني للمعادلة التربيعية في س يعطى بواسطة إحداثي (إحداثيات) نقطة (نقط) تقاطع المنحنى مع القطعة المستقيمة.

س	3-	2-	1-	صفر	1	2	3	4	5
ص	11-	4-	1	4	5	4	1	4-	11-

الجدول المعطى للعلاقة ص = 4 + 2س − س^2.

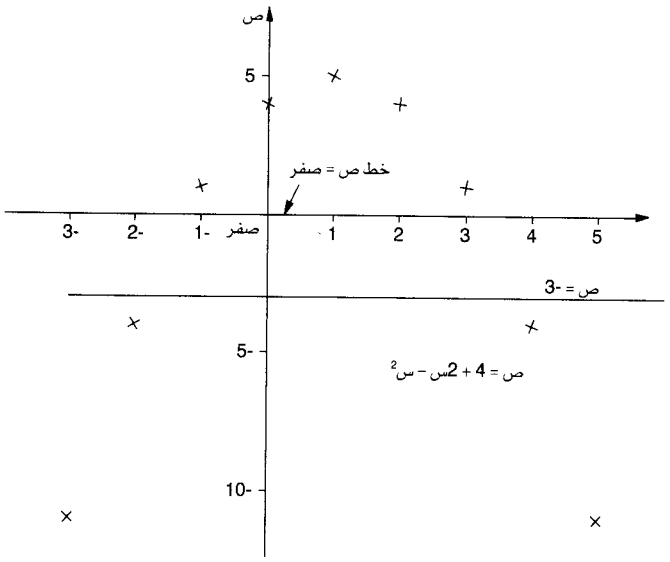
(أ) مستخدمًا مقياس رسم 1 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2 سم ليمثل 5 وحدات على محور الصادات، ارسم بيانيًّا العلاقة

ص = 4 + 2س − س^2 عندما 3- ≤ س ≤ 5

(ب) استخدم الرسم البياني لحل

(i) 4 + 2س − س^2 = صفر (ii) 4 + 2س − س^2 = 3-

(أ)



(ب) (i) المنحنى هو ص = 4 + 2س − س^2 .....(1)

من 4 + 2س − س^2 = صفر

لدينا ص = صفر .....(2)

يتقاطع (1)، (2) في النقط حيث س = 1.2- ، س = 3.2

∴ حل العلاقة 4 + 2س − س^2 = صفر يكون س = 1.2- ، 3.2

(ii) من المعادلة 4 + 2س − س^2 = 3-

لدينا ص = 3- .....(3)

يتقاطع 1، 3 في النقط حيث س = 1.8- ، س = 3.8

∴ حل العلاقة 4 + 2س − س^2 = 3- يكون س = 1.8- ، 3.8

إن لم يكن الحل عددًا صحيحًا، حاول تصحيح إجابتك لأقرب رقم عشري واحد.

مثال 25

الجدول التالي للعلاقة ص = س^2 – 4س + 3

س	1-	0	1	2	3	4	5
ص	8	3	0	1-	0	3	8

(أ) مستخدمًا 1 سم لتمثل وحدة واحدة على كلا المحورين، ارسم العلاقة
ص = س^2 – 4س + 3 عندما 1- ≤ س ≤ 5

(ب) استخدم الرسم لحل المعادلات:

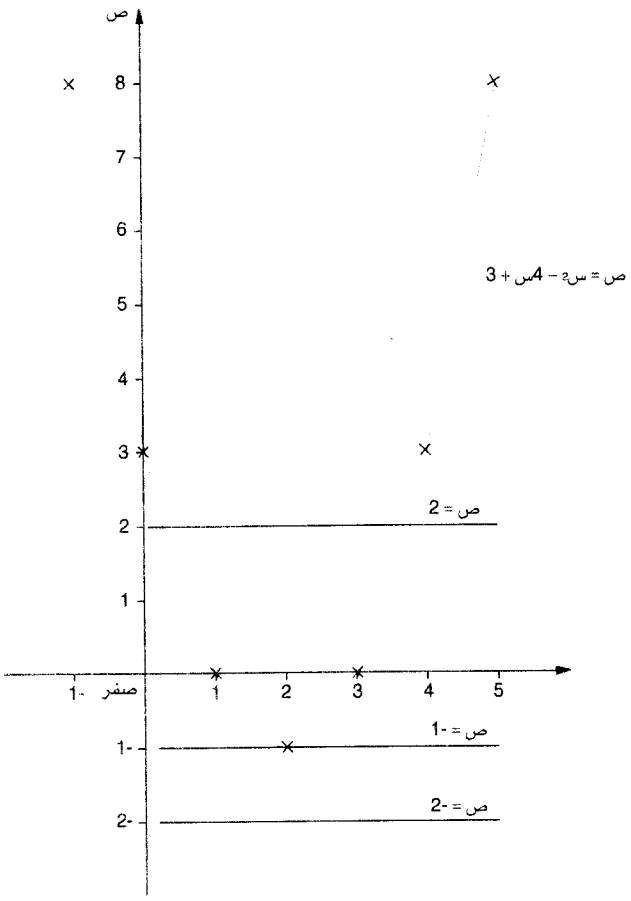
(i) س^2 – 4س + 3 = 1-

(ii) س^2 – 4س + 3 = 2-

(iii) س^2 – 4س + 1 = صفر

الحل

(أ)



(ب) (i) المنحنى المرسوم هو ص = س^2 – 4س + 3 ..... (1)

من س^2 – 4س + 3 = 1-

لدينا ص = 1- ..... (2)

يتقاطع المنحنى (1) والخط (2) في نقطة واحدة فقط أي عندما س = 2

∴ حل المعادلة س^2 – 4س + 3 = 1- هو س = 2

للتأكد عن طريق التحليل : $س^2 - 4س + 3 = -1$

$س^2 - 4س + 4 = صفر$

$(س - 2)(س - 2) = صفر$

$\therefore$ س $- 2 = صفر$ أو $س - 2 = صفر$

$\therefore$ س $= 2$ $\quad$ س $= 2$

ملحوظة

عندما س $= 2$

يسمى هذا: تكرارًا للحل

(ii) من $س^2 - 4س + 3 = -2$

لدينا ص $= -2$ ..... (3)

الخط (3) لا يقطع المنحنى (1).

$\therefore س^2 - 4س + 3 = -2$ ليس لها حل.

(iii) لاستخدام الرسم البياني ص $= س^2 - 4س + 3$ لحل المعادلة

$س^2 - 4س + 1 =$ صفر، علينا تحويل $س^2 - 4س + 1$ إلى $س^2 - 4س + 3$ بأداء بعض المعالجات الجبرية.

الخطوات المطلوبة هى كما يلي:

$س^2 - 4س + 1 =$ صفر

$س^2 - 4س = -1$ ⟵ حول الحد الذي لا يوجد فى معادلة المنحنى المرسوم إلى الطرف الأيسر.

$س^2 - 4س + 3 = -1 + 3$ ⟵ جمع عدد مناسب لكلا الطرفين بحيث يطابق الطرف الأيمن شكل المنحنى المرسوم.

$\therefore$ علينا حل $س^2 - 4س + 3 = 2$

ولهذا فإن الخط المطلوب هو ص $= 2$

يتقاطع الخط ص $= 2$، المنحنى ص $= س^2 - 4س + 3$ في النقط حيث

س $= 0.3$ ، س $= 3.7$.

(جذور المعادلة) أو حل $س^2 - 4س + 1 =$ صفر يكون س $= 0.3$ ، 3.7

تمرين (٤)

1- الجدول التالي للعلاقة ص $= س^2 - س - 3$

س	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
ص	9	3	-1	-3	-3	-1	3	9

(أ) مستخدمًا 2 سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 1 سم لتمثل وحدة واحدة من محور الصادات ارسم العلاقة

ص $= س^2 - س - 3$ عندما $-3 \leq$ س ≤ 4.

(ب) استخدم الرسم لحل المعادلة.

(i) $س^2 - س - 3 =$ صفر

(ii) $س^2 - س - 3 = 6$

2- احسب قيمة هـ ، ك، م في الجدول التالي الذي يوضح العلاقة ص $= س^2 - 7س + 12$:

س	0	1	2	3	4	5	6	7
ص	12	هـ	2	ك	0	م	6	12

(أ) مستخدمًا 2 سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 1 سم لتمثل وحدة واحدة على محور الصادات، ارسم العلاقة

ص $= س^2 - 7س + 12$ عندما صفر $\leq$ س ≤ 7

(ب) حل المعادلة من الرسم

(i) $س^2 - 7س + 12 =$ صفر

(ii) $س^2 - 7س + 12 = 4$

3- (أ) بمعلومية ص = س^2 - 2س انقل وأكمل الجدول الآتي:

س	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
ص		1.25	0	-0.75		-0.75	0		3

(ب) مستخدمًا مقياس رسم 4 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات والصادات ارسم العلاقة
ص = س^2 - 2س عندما -1 ≤ س ≤ 3

(جـ) استخدم الرسم لحل المعادلة س^2 - 2س = 1

4- الجدول التالي للعلاقة
ص = س^2 - س - 4.

س	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
ص	8	2	-2	-4	-4	-2	2	8

(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 1 سم ليمثل وحدة واحدة على محور الصادات، ارسم العلاقة
ص = س^2 - س - 4 عندما -3 ≤ س ≤ 4

(ب) استخدم الرسم لحل المعادلات الآتية:
(i) س^2 - س - 4 = 2
(ii) س^2 - س - 4 = -3
(iii) س^2 - س - 4 = -5
(iv) س^2 - س - 8 = صفر

5- انقل وأكمل الجدول التالي الذي يوضح العلاقة
ص = س^2 - 3س.

س	-2	-1	0	1	2	3	4	5
ص	10		0		-2		4	

(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 1 سم ليمثل وحدة واحدة على محور الصادات، ارسم العلاقة
ص = س^2 - 3س عندما -2 ≤ س ≤ 5.

(ب) استخدم الرسم لحل المعادلات الآتية
(i) س^2 - 3س = 4
(ii) س^2 - 3س = -1
(iii) س^2 - 3س = -3
(iv) س^2 - 3س - 7 = صفر

6- انقل وأكمل جدول العلاقة
ص = 4س^2 - 8س - 5

س	-2	-1	0	1	2	3	4
ص	27		-5		-5		27

(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2 سم ليمثل خمس وحدات على محور الصادات ارسم العلاقة
ص = 4س^2 - 8س - 5

(ب) استخدم الرسم لحل المعادلات الآتية:
(i) 4س^2 - 8س - 5 = صفر
(ii) 4س^2 - 8س = صفر
(iii) 4س^2 - 8س + 4 = صفر
(iv) 4س^2 - 8س - 21 = صفر

7- الجدول التالي للعلاقة ص = 5 - 3س - 2س^2

س	-3	-2	-1	0	1	2
ص	-4	3	6	5	0	-9

(أ) احسب قيمة ص عندما س = $-\frac{1}{2}$

(ب) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 1 سم ليمثل وحدة واحدة على محور الصادات، ارسم العلاقة
ص = 5 - 3س - 2س^2 عندما -3 ≤ س ≤ 2.

(جـ) استخدم رسمك في حل
(i) 5 - 3 س - 2س^2 = صفر
(ii) 2 - 3س - 2س^2 = صفر.

8- الجدول التالي للعلاقة ص = $\frac{1}{2}$(7س - س^2)

س	0	1	2	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	6	7	8
ص	0	3	5	6	أ	6	5	3	0	ب

(أ) احسب قيمة أ، ب.

(ب) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، والصادات ارسم العلاقة
ص = $\frac{1}{2}$(7س - س^2) عندما صفر ≤ س ≤ 8 .

(جـ) استخدم الرسم في إيجاد قيمتين للمجهول س يحققا المعادلة 7س - س^2 = 5.

الجدول التالي للعلاقة ص = 2س^2.

س	3-	2-	1-	0	1	2	3
ص	18	8	2	0	2	8	18

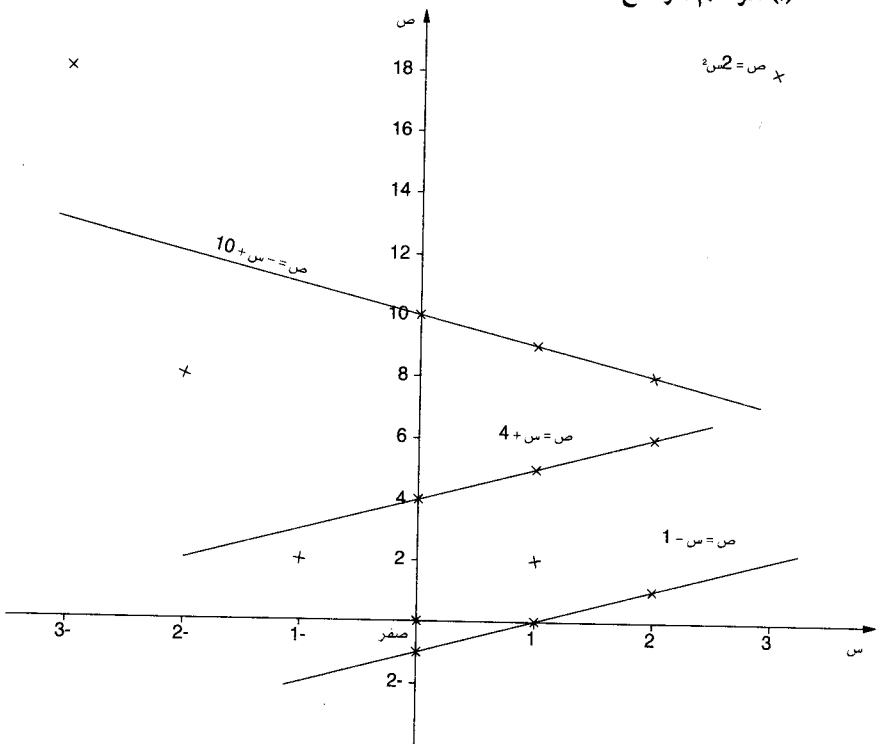
(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 1 سم ليمثل وحدتين على محور الصادات، ارسم العلاقة
ص = 2س^2 عندما - 3 ≤ س ≤ 3.

(ب) ارسم مجموعة من القطع المستقيمة على نفس المستوى الديكارتي لحل المعادلات التالية:

(i) 2س^2 = س + 4 (ii) 2س^2 + س - 10 = 0 (iii) 2س^2 - س + 1 = صفر

(i)

(أ) الرسم موضح أدناه.



ملحوظة

الجدول ص = س + 4:

س	0	1	2
ص	4	5	6

(ب) المنحنى المرسوم هو ص = 2 س^2 .....(1)

(i) لحل المعادلة 2س^2 = س + 4

نحتاج إلى رسم الخط ص = س + 4 .....(2)

الإحداثي السيني لنقط تقاطع الخط (2) والمنحنى (1) هي س = -1.2، س = 1.7.

ولهذا يكون حل المعادلة 2س^2 = س + 4

هو س = - 1.2، س = 1.7.

ملحوظة

الجدول ص = − س + 10:

س	0	1	2
ص	10	9	8

الجدول ص = س − 1:

س	0	1	2
ص	1-	0	1

(ii) حل المعادلة $2س^2$ + س − 10 = صفر يكافئ تمامًا حل المعادلة

$2س^2$ = − س + 10

∴ نحتاج إلى رسم الخط البياني ص = − س + 10 .....(3)

الإحداثي السيني لنقط تقاطع المستقيم (3) والمنحنى (1) هي

س = −2.5، س = 2

ولهذا فإن حل المعادلة $2س^2$ + س − 10 = صفر هو س = −2.5 أو س = 2

(iii) حل المعادلة $2س^2$ − س + 1 = صفر يكافئ تمامًا حل $2س^2$ = س − 1

∴ نحتاج إلى رسم المستقيم ص = س − 1 .....(4)

بما أن الخط (4) لا يقطع المنحنى (1) فإن $2س^2$ − س + 1 = صفر ليس لها حل.

يعطي الجدول التالي بعض قيم ص = 5 + 8س − $4س^2$.

س	2-	1-	0	1	2	3	4
ص	27-	7-	5	9	5	7-	27-

(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 1 سم ليمثل خمس وحدات على محور الصادات،

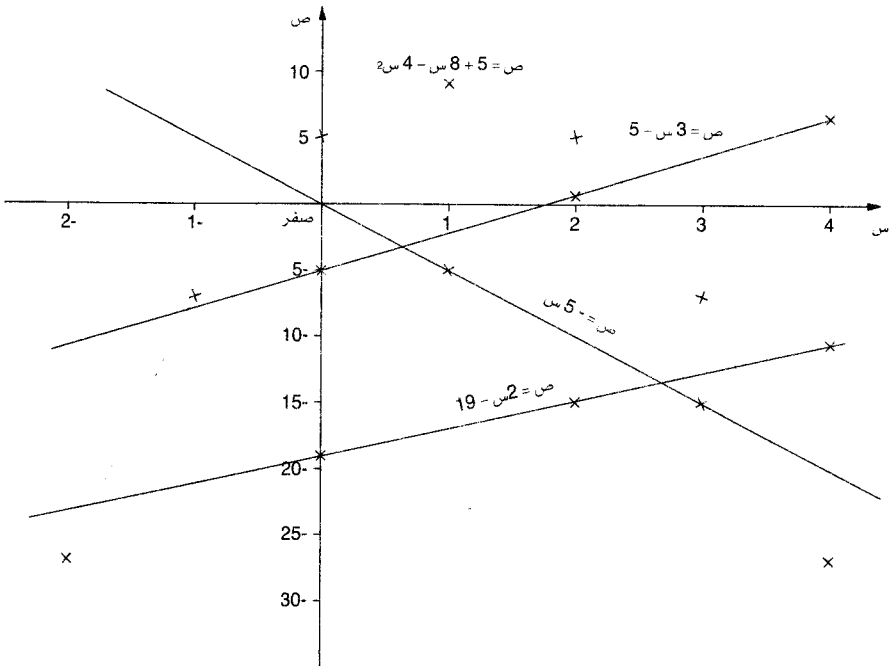
ارسم العلاقة ص = 5 + 8س − $4س^2$ عندما 2− ≤ س ≤ 4

(ب) برسم مجموعة من القطع المستقيمة، حل المعادلات الآتية:

(i) 5 + 8س − $4س^2$ = $2س^2$ − 19 (ii) 5 + 13س − $4س^2$ = صفر

(iii) 10 + 5س − $4س^2$ = صفر

(أ)



(ب) المنحنى المرسوم هو ص = 5 + 8س – 4 س^2 ..... (1)

(i) لحل العلاقة 5 + 8س – 4س^2 = 2س – 19 نحتاج إلى رسم الخط المستقيم

ص = 2س – 19 ..... (2)

الخط المستقيم (2) يقطع المنحنى (1) في النقط حيث

س = – 1.8 ، 3.3.

∴ الحل للعلاقة 5 + 8س – 4 س^2 = 2س – 19 هو س = –1.8 ، 3.3

ملحوظة

الجدول ص = 2س – 19:

س	0	2	4
ص	19–	15–	11–

(ii) لاستخدام الرسم البياني ص = 5 + 8س – 4 س^2 في حل المعادلة

5 + 13س – 4 س^2 = صفر، علينا تحويل 5 + 13س – 4 س^2 إلى

5 + 8س – 4 س^2 بأداء بعض المعالجات الجبرية.

والخطوات كما يلي:

5 + 13س – 4 س^2 = صفر

5 – 4 س^2 = – 13س ← انقل الحد غير الموجود في معادلة المنحنى إلى الطرف الأيسر.

5 + 8س – 4 س^2 = –13س + 8س ← أضف الحد 8س إلى كلا الطرفين بحيث يطابق الطرف الأيمن معادلة المنحنى.

= – 5س

أي أن المستقيم المرسوم ص = – 5س ..... (3)

∴ 5 + 8س – 4 س^2 = = – 5س

المستقيم (3) يقطع المنحنى (1) في النقط حيث س = –0.35 ، 3.6

∴ حلول المعادلة 5 + 13س – 4 س^2 = صفر هي س = – 0.35 ، 3.6

ملحوظة

الجدول ص = – 5س:

س	0	1	3
ص	0	5–	15–

(iii) لاستخدام الشكل البياني ص = 5 + 8س – 4 س^2 في حل المعادلة

10 + 5 س – 4 س^2 = صفر علينا تحويل 10 + 5 س – 4 س^2 إلى

5 + 8س – 4 س^2 بأداء بعض المعالجات الجبرية.

الرقم العشري الثاني إما 5 أو صفر

والخطوات هي كما يلي:

10 + 5 س – 4 س^2 = صفر

– 4 س^2 = – 5س – 10

5 + 8س – 4 س^2 = – 5س – 10 + 5 + 8س

= 3س – 5

أي أن المستقيم المرسوم ص = 3س – 5 ..... (4)

∴ 5 + 8س – 4 س^2 = 3س – 5

المستقيم (4) يقطع المنحنى (1) في النقط حيث س = –1.05 ، 2.3

∴ حل المعادلة 10 + 5 س – 4 س^2 = صفر هو س = – 1.05 ، 2.3

ملحوظة

الجدول ص = 3س – 5:

س	0	2	4
ص	5–	1	7

1- يبين الجدول التالي العلاقة ص = س^2 - 2

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
ص	7	2	-1	-2	-1	2	7

(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على المحورين، ارسم العلاقة ص = س^2 - 2 عندما -3 ≤ س ≤ 3

(ب) مستخدمًا نفس المحاور، ارسم الخط المستقيم ص = 2س - 1 بيانيًّا واستخدم رسمك لحل المعادلة س^2 - 2 = 2س - 1

2- انقل وأكمل الجدول التالي الذي يوضح العلاقة ص = 8 + 2س - س^2

س	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
ص	-7			8	9			0	-7

(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 1 سم ليمثل وحدة واحدة على محور الصادات، ارسم العلاقة ص = 8 + 2س - س^2 عندما -3 ≤ س ≤ 5

(ب) برسم مجموعة من القطع المستقيمة المناسبة على نفس المحورين، حل المعادلات الآتية:

(i) 8 + 2س - س^2 = 2س - 1

(ii) 8 - س^2 = - س

(iii) 5 + 3س - س^2 = صفر

3- الجدول الآتي للعلاقة ص = 5 - 2س - 3س^2:

س	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
ص	-16	ى	4	5	ن	0	ل	-28

(أ) احسب قيمة ى ، ن ، ل

(ب) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2 سم ليمثل 5 وحدات على محور الصادات، ارسم العلاقة ص = 5 - 2س - 3س^2 عندما - 3 ≤ س ≤ 3

(جـ) برسم مجموعة من القطع المستقيمة المناسبة على كلا المحورين، حل المعادلات الآتية:

(i) 5 - 2س - 3س^2 = 2 - 2س

(ii) 5 - 4س - 3س^2 = صفر

(iii) 15 + 2س - 3س^2 = صفر

4- المتغيران س، ص تربطهما المعادلة التالية

ص = $\frac{\text{س}^2}{2}$ - 2س

بعض قيم س ، ص المتناظرة معطاة في الجدول التالي:

س	-1	0	0.5	1	2	3	4	5	6
ص	2.5	0	-0.9	-1.5	-2	-1.5	0	2.5	أ

(أ) احسب قيمة أ.

(ب) مستخدمًا 2 سم لتمثل وحدة واحدة على كلا المحورين، ارسم العلاقة

ص = $\frac{\text{س}^2}{2}$ - 2س

حيث -1 ≤ س ≤ 6

(جـ) أوجد من رسمك

(i) قيمة ص عندما س = 4.7

(ii) قيمة س عندما ص = -1

(د) على نفس المحاور، ارسم الخط البياني للعلاقة

ص = $\frac{\text{س}}{2}$ - 2

ثم استخدم الرسم في حل المعادلة

$\frac{\text{س}^2}{2}$ - 2س = $\frac{\text{س}}{2}$ - 2 .

5- المتغيران س، ص تربطهما العلاقة الآتية

$ص = 2س^2 - 5س - 3$

وبعض قيم س، ص المتناظرة معطاة في الجدول التالي:

س	-2	-1	صفر	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
ص	أ	4	-3	ب	-6	-5	صفر	9	22

احسب قيم أ، ب

مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2 سم ليمثل 5 وحدات على محور الصادات، ارسم العلاقة:

$ص = 2س^2 - 5س - 3$ عندما $-2 \geq س \geq 5$

(أ) أوجد من الرسم

(i) أقل قيمة لـ ص.

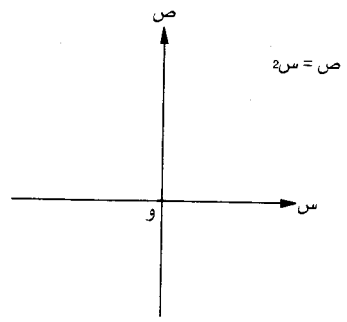
(ii) قيم س عندما ص = 5

(ب) برسم قطعة مستقيمة مناسبة على نفس المحاور، استخدم رسمك البياني في إيجاد حل للمعادلة:

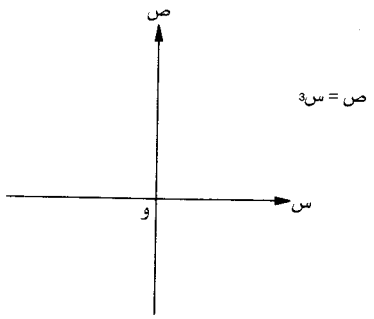
$2س^2 - 5س - 3 = 3س + 4$

10-1 الرسوم البيانية الأسيَّة Exponential Graphs

الرسوم البيانية غير الخطية الأساسية الأربعة والتي سبق أن درستها هي كما يلي:



الدالة التربيعية
(القطع المكافئ)

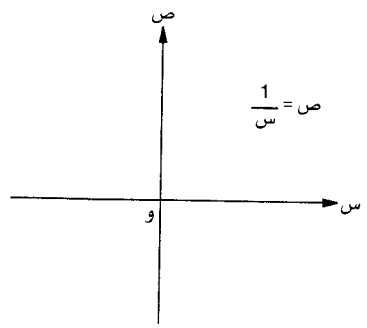


الرسوم البيانية
التكعيبية

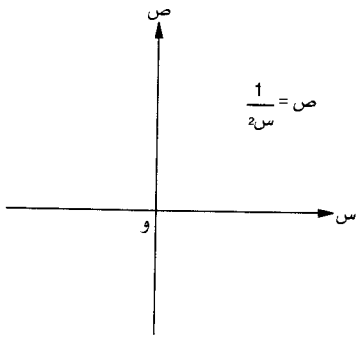
ملحوظة

1- تعرف الدالة التربيعية عند رسمها بيانيًّا باسم القطع المكافئ

2- تعرف الرسوم البيانية المتبادلة باسم القطع الزائد.



الرسوم البيانية المتبادلة
(القطع الزائد)



الرسوم البيانية
المتبادلة التربيعية

ملحوظة

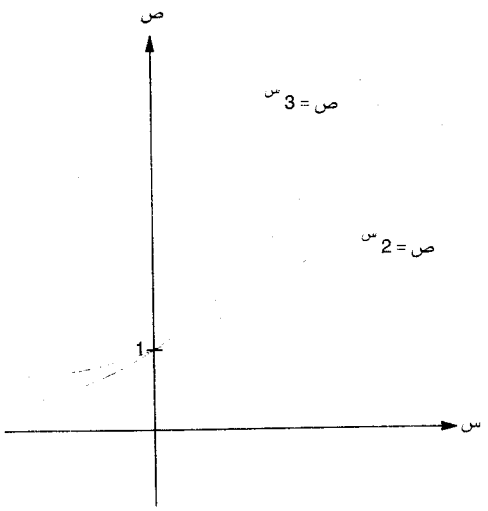
لحساب قيم ص في العلاقة ص= $(2)^{س}$
باستخدام الآلة الحاسبة .D.A.L
لحساب 2^{-3} مثلًا:

ضغط	عرض
2	2
ص س	2 ∧ صفر
3	2 ∧ 3
+ / -	2 ∧ 3-
=	0.125

في بعض الأنواع الأخرى من الآلات الحاسبة، اضغط مفتاح

EXE بدلاً من =

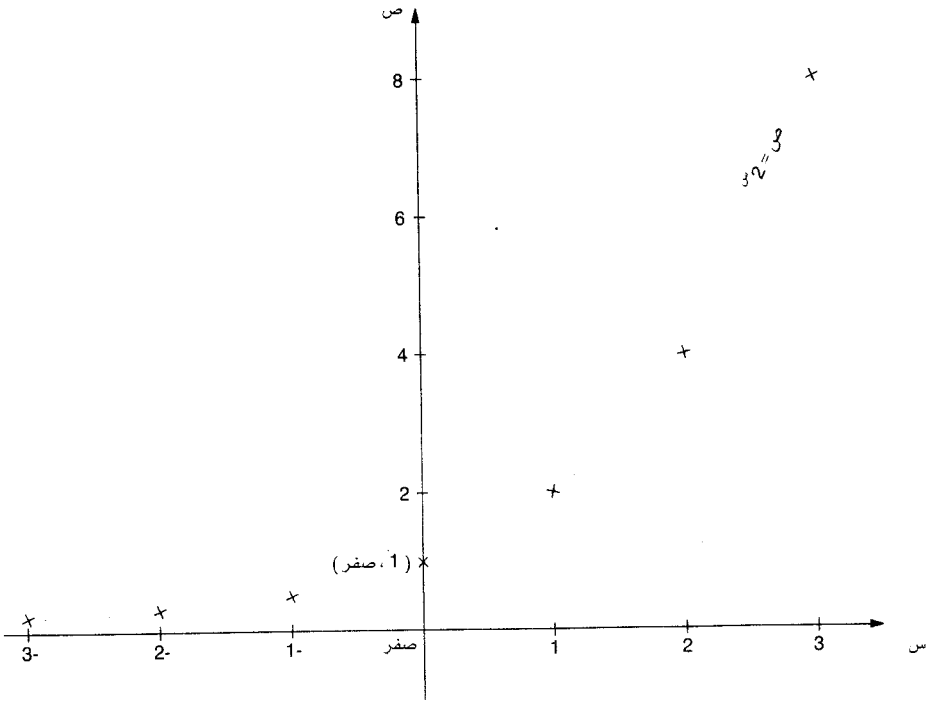
شكل بياني آخر غير خطي على الصورة ص = $أ^{س}$، حيث أ ثابت، أ > 1 يسمى هذا **الرسم الدليلي (الأسي).**



يجب دائمًا عند رسم شكل بياني غير خطي رسم بعض النقاط (على الأقل 5) باختيار قيم س ثم حساب قيم ص المتناظرة.

نرسم الآن العلاقة ص = $2^{س}$ عندما -3 ≤ س ≤ 3، الجدول التالي للعلاقة ص = $2^{س}$:

س	-3	-2	-1	صفر	1	2	3
ص	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8



ملحوظة:

في الرسم البياني للعلاقة ص = $2^{س}$، بتناقص قيمة س، يقترب المنحنى أكثر فأكثر من محور السينات، ولكن لا يقطعه أبدًا، ويمكن رؤية ما يلي من الرسم.

(أ) لكل قيم س، ص > صفر. (بمعنى أن المنحنى يقع بالكامل فوق المحور السيني)

(ب) عندما س = صفر، ص = $2^{صفر}$ = 1

(جـ) إذا س < صفر فإن صفر < ص < 1

للرسم الدليلي (الأسي):

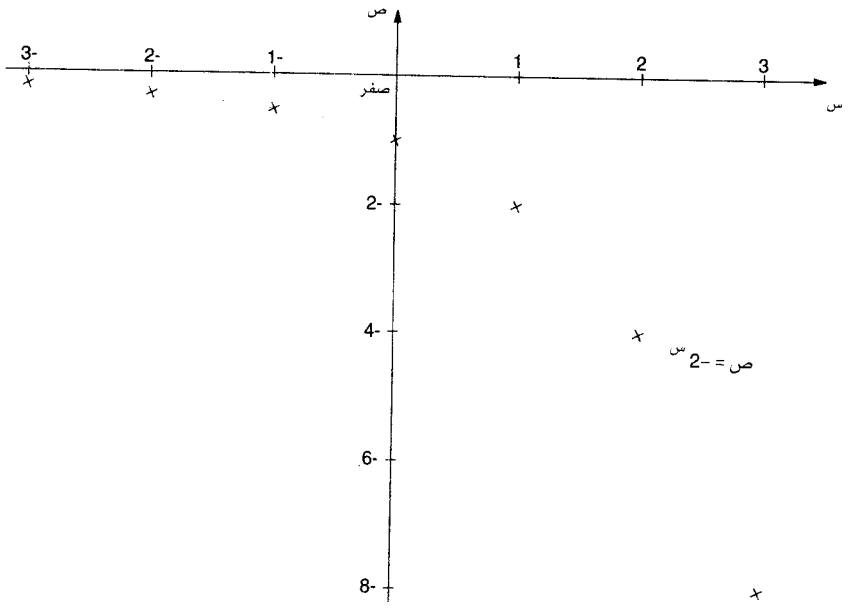
إذا كان أ > 1 فإن الشكل البياني للعلاقة ص = $أ^{س}$ يكون له شكل عام مثل الشكل البياني ص = $2^{س}$ ويقطع محور الصادات في النقطة (صفر، 1).

(أ) ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = $-2^{س}$ عندما $-3 \leq$ س ≤ 3

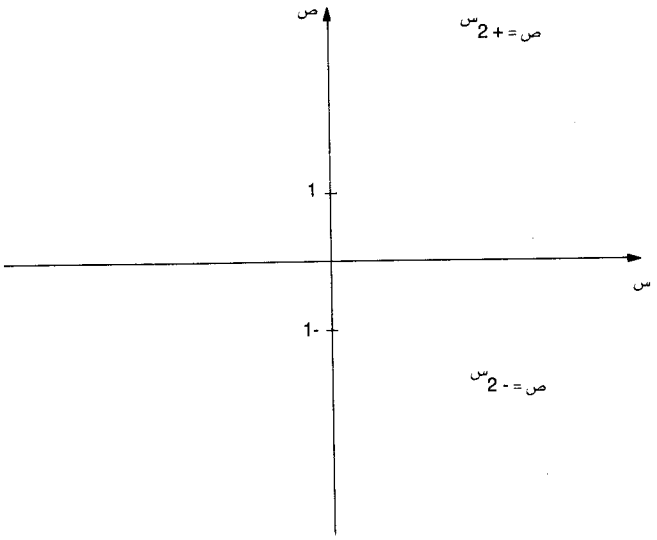
(ب) ما علاقة هذا الشكل البياني بالمنحنى ص = $2^{س}$ ؟

(أ) الجدول للعلاقة ص = $-2^{س}$ كما يلي:

س	3-	2-	1-	صفر	1-	2-	3
ص	0.125-	0.25-	0.5-	1-	2-	4-	8-



(ب) المنحنى ص = $-2^{س}$ هو انعكاس للمنحنى ص = $2^{س}$ في محور السينات.



1- انقل وأكمل الجدول التالي للعلاقة ص = $3^{س}$، أعط قيم ص لأقرب رقمين عشريين.

س	3-	2-	1-	صفر	1	2	3
ص	0.04						27

مستخدمًا 2سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2سم لتمثل خمس وحدات على محور الصادات، ارسم العلاقة ص = $3^{س}$ عندما $-3 \leq$ س ≤ 3.

2- مستخدمًا 2سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2سم لتمثل خمس وحدات على محور الصادات، ارسم العلاقة ص = $-3^{س}$ عندما $-3 \leq$ س ≤ 3 ما علاقة هذا الرسم البياني بالمنحنى ص = $3^{س}$؟

3- مستخدمًا 2سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2سم لتمثل 5 وحدات على محور الصادات ارسم العلاقة ص = $5^{س}$ عندما $-3 \leq$ س ≤ 2، أين يقطع هذا المنحنى محور الصادات؟

4- (أ) انقل وأكمل الجدول التالي للعلاقة ص = $5^{س} + 4$

س	3-	2-	1-	صفر	1	2
ص	4.01					29

(ب) مستخدمًا 2سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2سم لتمثل خمس وحدات على محور الصادات، ارسم العلاقة ص = $5^{س} + 4$ عندما $-3 \leq$ س ≤ 2

(جـ) أين يقطع المنحنى ص = $5^{س} + 4$ محور الصادات؟

(د) كيف تحصل على هذا المنحنى البياني من المنحنى البياني ص = $5^{س}$؟

5-(أ) انقل وأكمل الجدول التالي للعلاقة ص = $5^{س} - 4$

س	3-	2-	1-	صفر	1	2
ص	3.99-				1	21

(ب) مستخدمًا 2سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2سم لتمثل خمس وحدات على محور الصادات، ارسم العلاقة ص = $5^{س} - 4$ عندما $-3 \leq$ س ≤ 2

(جـ) أين يقطع المنحنى ص = $5^{س} - 4$ محور السينات؟

(د) أين يقطع المنحنى ص = $5^{س} - 4$ محور الصادات؟

(هـ) كيف تحصل على هذا الشكل البياني من الشكل البياني ص = $5^{س}$؟

أجب عن عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

6- (أ) يعطي جدول (1) التالي بعض قيم س وقيم ص المناظرة لها، مقربة لأقرب رقمين عشريين.
حيث ص = س (1 + س) (3- س).

جدول (1)

س	صفر	0.5	1	1.5	2	2.5	3
ص	صفر	1.88	4	5.63	6	4.38	ى

(i) أوجد قيمة ى.

(ii) مستخدمًا مقياس رسم 4سم ليمثل وحدة واحدة، ارسم محور السينات الأفقي حيث صفر ≤ س ≤ 3، مستخدمًا مقياس رسم 2سم ليمثل وحدة واحدة، ارسم محور الصادات الرأسي حيث صفر ≤ ص ≤ 8
على المحاور المرسومة ارسم النقط المعطاة في الجدول ثم صل فيما بينها بمنحنى انسيابي.

(iii) استخدم رسمك البياني في إيجاد أكبر قيمة للمقدار س (1 + س) (3 - س) في الفترة صفر ≤ س ≤ 3

(ب) يبين جدول (2) بعض قيم س، ص المتناظرة حيث ص = $2^{س}$.

جدول (2)

س	صفر	0.5	1	1.5	2	2.5	3
ص	1	1.41	2	ط	4	5.66	8

(i) أوجد قيمة ط، مقربًا لأقرب رقمين عشريين،

(ii) على المحورين المستخدمين في الجزء (أ)(ii)، ارسم الشكل البياني ص = $2^{س}$

(جـ) أوجد من رسمك البياني قيم س في الفترة صفر ≤ س ≤ 3 بحيث أن

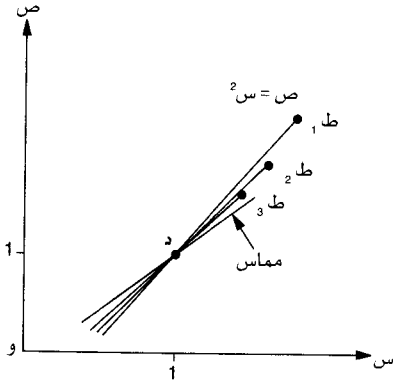
(i) س (1+ س) (3- س) = 3

(ii) س (1+ س) (3- س) < $2^{س}$

11-1 تقدير ميل الرسومات البيانية غير الخطية
Estimation of Gradients for Non-linear Graphs

تعلمنا فيما سبق ميل الرسومات البيانية الخطية التي تبين المسافات المقطوعة وبالمثل - بالنسبة للرسوم البيانية غير الخطية:

- ميل منحنى الشكل البياني الذي يرسم العلاقة بين المسافة - الزمن يمثل السرعة.
- ميل منحنى الشكل البياني الذي يرسم العلاقة بين السرعة - الزمن يمثل العجلة.



باعتبار النقطة (1،1) على الشكل البياني للمنحنى ص = $س^2$. ارسم النقطة ط$_1$ والتي إحداثيها السيني أكبر من الإحداثي السيني للنقطة ى بدرجة طفيفة وليكن 1.1

ولهذا فإن الإحداثي الصادي للنقطة ط$_1$ يكون $(1.1)^2 = 1.21$

∴ إحداثا النقطة ط$_1$ هما (1.1 ، 1.21)

ومن ثم فإن ميل الوتر ى ط$_1$ $= \frac{1 - 1.21}{1 - 1.1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$

ارسم بعد ذلك، النقطتين ط$_2$، ط$_3$ بحيث تكون كل نقطة أقرب بالتوالي إلى ى.
ويبين الجدول التالي الميل في كل حالة.

الإحداثي السيني للنقطة ط$_i$	الإحداثي الصادي للنقطة ط$_i$	ميل ط$_i$
1.1	1.21	2.1
1.01	1.0201	2.01
1.001	1.002 001	2.001

ملحوظة

عندما i = 1، ط = ط$_1$
عندما i = 2، ط = ط$_2$
عندما i = 3، ط = ط$_3$

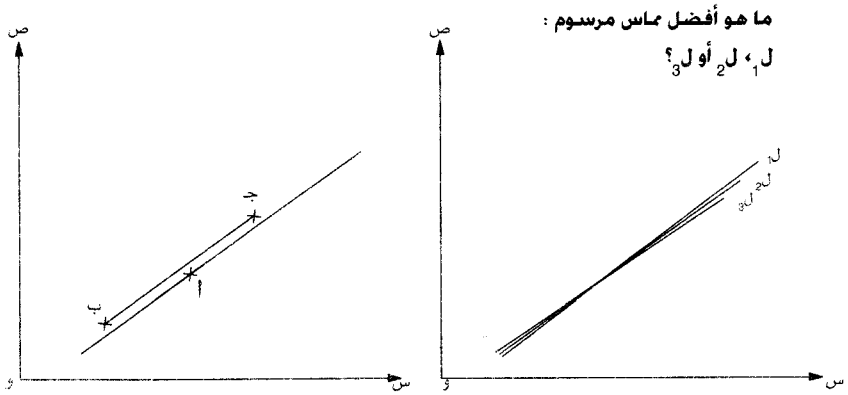
المستقيمات ى ط$_1$، ى ط$_2$، ى ط$_3$، أوتار تمر بنقطة محددة (ى). لاحظ أن ميل المستقيم ى ط يقترب من القيمة 2 كلما تحركت النقطة ط مقتربة من النقطة ى. ويشير هذا إلى وجود خط واحد فقط ميله = 2 بالكاد يمس المنحنى عند النقطة ى (عندما تصل ط إلى ى) . هذا الخط يسمى المماس عند ى. ميل هذا المماس يعين **ميل المنحنى عند النقطة ى.**

ميل المنحنى عند نقطة معينة هو نفس ميل المماس عند نفس النقطة:

- بالنسبة لمنحنى المسافة - الزمن، تُقَدَّر السرعة عند أي لحظة بميل المماس في تلك اللحظة.
- بالنسبة لمنحنى السرعة - الزمن، تُقدَّر العجلة عند أي لحظة بميل المماس في تلك اللحظة.

وبالتالي علينا تعلُّم كيفية رسم المماس للمنحنى عند نقطة معينة بإتقان.
ليس من السهل تحديد أفضل مماس مرسوم.

ما هو أفضل مماس مرسوم :
ل$_1$، ل$_2$ أو ل$_3$؟

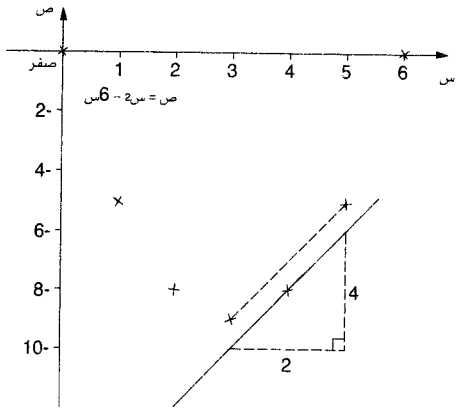


سوف نستخدم الخطوات التالية لرسم مماس للمعادلة التربيعية:

1- اختر نقطتين متجاورتين ولتكن ب، جـ. واحدة قبل النقطة (أ) المطلوب رسم المماس عندها وواحدة بعدها، بحيث تصبح النقطتان تقريبًا على أبعاد متساوية بطول المنحنى من النقطة المعطاة.
2- ارسم الوتر ب جـ.
3- مستخدمًا المثلث قائم الزاوية والمسطرة، ارسم مماسًا يمر بالنقطة أ موازيًا ب جـ.

ارسم الشكل البياني للمنحنى ص = س^2 - 6س حيث صفر ≤ س ≤ 6 برسم المماس للمنحنى عند النقطة (4، -8)، قدر ميل المنحنى عند هذه النقطة.

س	صفر	1	2	3	4	5	6
ص	صفر	5-	8-	9-	8-	5-	صفر



ميل المنحنى عند النقطة (4، -8) = ميل المماس عند هذه النقطة = $\frac{4}{2}$ = 2

ملحوظة

بالنسبة لقاعدة المثلث، استخدم قيمة بسيطة بحيث يمكن قسمة الارتفاع بسهولة للحصول على ميل المماس.

أُلقي حجر من أعلى جبل نحو البحر، يُعطَى ارتفاع الحجر ذ متر فوق سطح البحر بعد (ت) ثوان بالعلاقة ذ = 9 + 6ت - 2ت^2، والقيم المتناظرة لكل من ذ، ت معطاة بالجدول التالي:

ت	صفر	1	2	3	4	5
ذ	9	13		9	1	11-

(أ) احسب قيمة ذ عندما ت = 2

(ب) مستخدمًا 2سم لتمثل ثانية واحدة على المحور الأفقي (السينات)، 2سم لتمثل 5 أمتار على محور الصادات الرأسي، ارسم المنحنى ذ = 9 + 6ت - 2ت^2

(جـ) استخدم رسمك البياني للإجابة عن الأسئلة التالية:

(i) ما ارتفاع الجبل؟

(ii) ما أعلى ارتفاع وصل إليه الحجر؟

(iii) ماذا تعني القيمة السالبة للمسافة (ذ)؟

(د) استخدم الرسم البياني لتقدير

(i) السرعة عندما ت = 1 (ii) السرعة عندما ت = 3

(iii) قيمة (ت) عندما تكون سرعته الرأسية صفر.

ملحوظة

السرعة الاتجاهية هي السرعة القياسية في اتجاه الحركة المطلوبة.

ملحوظة

لرسم المماس للمنحنى عند س = 1

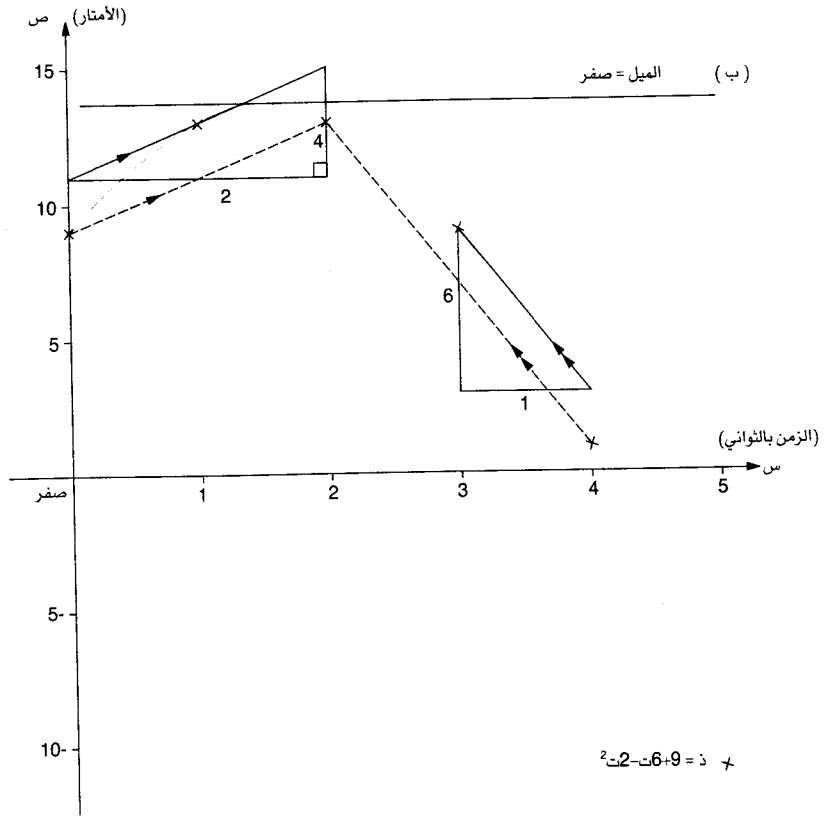
1- اختر نقطتين على المنحنى واحدة قبل س = 1، والأخرى بعدها بحيث تكون النقطتان على مسافات متساوية من النقطة س.

2- ارسم الوتر المنقط الواصل بين النقطتين.

3- مستخدمًا المثلث قائم الزاوية والمسطرة. ارسم المماس عند س = 1 يوازي هذا الوتر.

(أ) عندما ت = 2، فإن ذ = $9 + 6 \times 2 - 2 \times (2)^2$ = 13 متر

(ب)



ملحوظة

ميل المماس يكون موجبًا، ولهذا تكون السرعة الاتجاهية موجبة. ويشير ذلك إلى الرحلة الخارجة.

لاحظ أن انحدار المماس لأسفل من ناحية اليسار له ميل سالب. احتفظ بالإشارة السالبة: إنها تشير إلى رحلة العودة.

(جـ) (i) ارتفاع الجبل هو قيمة ذ عندما ت = صفر.

ونجد من الشكل البياني أن ت = صفر، عندما ذ = 9.

∴ ارتفاع الجبل 9 أمتار.

(ii) من الشكل البياني، أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر = 13.5م.

(iii) القيمة السالبة للمسافة (ذ) تعني العمق أسفل مستوى سطح البحر.

(د) (i) عندما ت = 1 فإن ميل المماس = $\frac{4}{2}$ = 2

∴ سرعة الحجر هي 2 م / ثانية

(ii) عندما ت = 3، فإن ميل المماس = $-\frac{6}{1}$ = -6

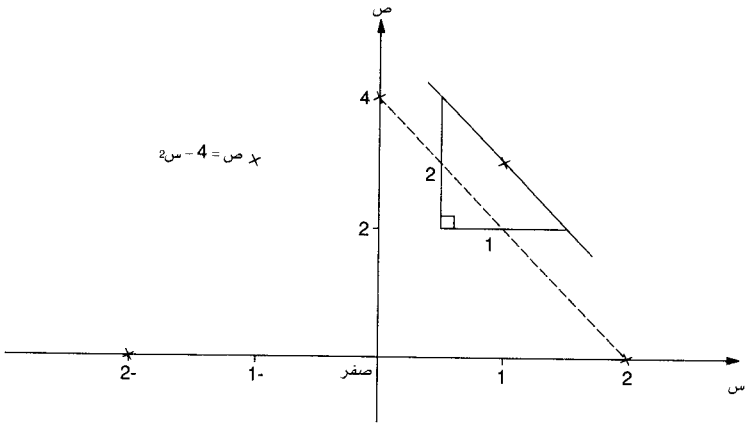
∴ سرعة الحجر هي -6 م/ث

(iii) عندما تكون السرعة = صفر فإن ميل المماس = صفر.

ومن الشكل البياني نجد أن ت = 1.5 ثانية.

ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = 4 - س^2 حيث -2 ≤ س ≤ 2
ثم أوجد قيمة ميل المنحنى عند النقطة حيث س =1

س	-2	-1	صفر	1	2
ص	صفر	3	4	3	صفر



ملحوظة

لاحظ انحدار المماس إلى أسفل من اليسار ولهذا فإن الميل يكون سالبًا.

عند النقطة (1، 3) ميل المنحنى = ميل المماس عند النقطة (1، 3).

$$= -\frac{2}{1} = -2$$

يتحرك جسم بطول قطعة مستقيمة ع ط وبعد زمن (ت) ثانية، كانت سرعته (ع) م/ث في اتجاه ع ط معطاة بالقيم الموجودة في الجدول التالي:

ت	صفر	1	2	3	4	5
ع	5	1	-1	-1	1	5

مستخدمًا 2سم لتمثل 1 ثانية على المحور الأفقي، 1سم لتمثل 1 م/ث على المحور الرأسي، ارسم المنحنى الانسيابي للسرعة - الزمن للمعلومات المعطاة بأعلى.

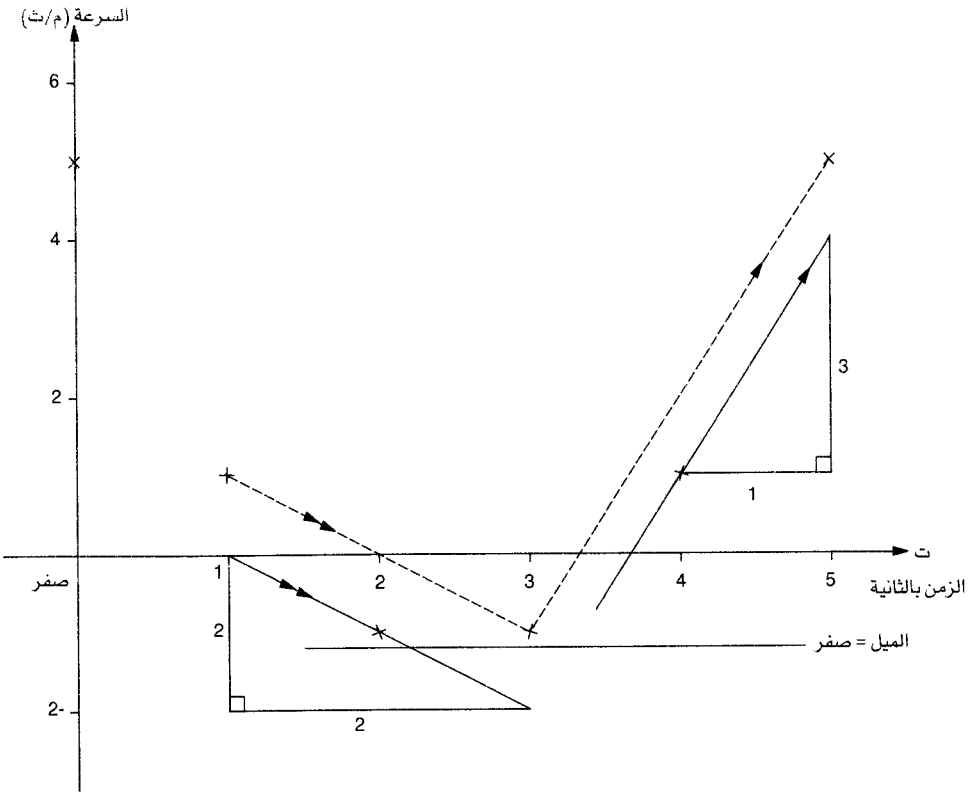
استخدم رسمك البياني لتقدير:

(أ) قيم (ت) التي عندها السرعة = صفر.

(ب) العجلة بعد ثانيتين.

(جـ) العجلة بعد 4 ثواني.

(د) الزمن الذي تصبح عنده العجلة مساوية للصفر.



(أ) من الرسم عندما السرعة = صفر

الزمن = 1.4ث أو 3.6 ث.

(ب) عندما يكون الزمن = 2، ميل المماس = $-\frac{2}{2}$ = -1

∴ عجلة الجسم = -1 م/ث^2.

(جـ) عندما الزمن = 4 ، ميل المماس = $\frac{3}{1}$ = 3

∴ عجلة الجسم = 3 م/ث^2

(د) عندما تكون العجلة = صفر ، ميل المماس = صفر.

ونجد من الشكل أن ت = $2\frac{1}{2}$ ث.

1- الجدول التالي غير مكتمل لقيم العلاقة ص = س^2 + س - 6

س	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	صفر	1	2	3
ص	6		-4	-6		-6	صفر	6	

(أ) احسب قيم ص الناقصة.

(ب) مستخدمًا 2سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2سم لتمثل وحدتين على محور الصادات، ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = س^2 + س - 6

(جـ) برسم المماس، أوجد ميل المنحنى عند النقطة:

(i) س = 2 (ii) س = -2

(د) حدد قيمة س التي يساوي عندها ميل المنحنى صفرًا.

2- يرتبط المتغيران س ، ص بالمعادلة

ص = 5 + 3 س - 2 س^2

بعض القيم المتناظرة للمتغيرين معطاة في الجدول التالي:

س	-2	-1	صفر	$\frac{1}{2}$	1	2	3
ص	-9	أ	5	ب	6	3	حـ

(أ) احسب قيم أ، ب ، حـ.

(ب) مستخدمًا 2سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات، 2سم لتمثل وحدتين على محور الصادات، ارسم الشكل البياني للعلاقة

ص = 5 + 3 س - 2 س^2.

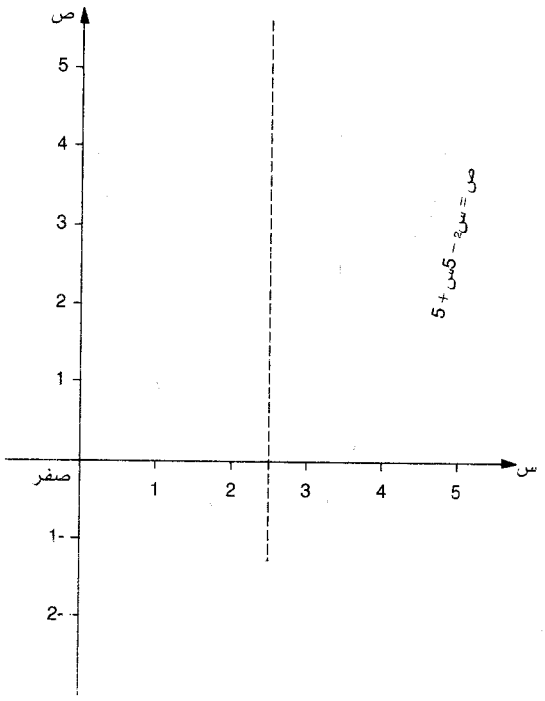
(جـ) أوجد قيمة ميل المنحنى عند النقط

(i) س = صفر، (ii) س = 2

(د) حدد قيمة س التي يساوي عندها ميل المنحنى صفرًا.

3- رُسم الشكل البياني للمنحنى ص = س^2 - 5س + 5 لقيم س المحصور بين صفر، 5. ويمثل السنتيمتر الواحد على كل محور وحدة قياس واحدة.

وعند رسم المماس عند النقطة (1.1)، أوجد قيمة ميل المنحنى عند هذه النقطة.



4- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال على ورقة رسم بياني واحدة.

يرتبط المتغيران س ، ص بالعلاقة:

ص = 2س^2 - 5س - 3

بعض قيم س، ص المتناظرة معطاة في الجدول التالي:

س	-2	-1	صفر	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
ص	أ	4	-3	ب	-6	-5	صفر	9	22

احسب قيمة كل من أ ، ب.

مستخدمًا 2سم لتمثل وحدة واحدة من محور السينات، 2سم لتمثل خمس وحدات على محور الصادات، ارسم الشكل البياني للعلاقة

ص = 2س^2 - 5س - 3 في الفترة -2 ≤ س ≤ 5

(أ) أوجد من الرسم البياني:

(i) أقل قيمة لـ ص

(ii) قيم س عندما ص = 5

(ب) أوجد عن طريق رسم المماس ميل المنحنى المرسوم عند النقطة حيث س = 2

5- قُذفت كرة من مستوى سطح الأرض نحو السماء. فإذا كانت العلاقة بين المسافة التي ترتفعها الكرة (ذ) بالمتر والزمن في أي لحظة (ت) بالثانية يعطى بالعلاقة:

ذ = 5 ت - ت^2.

بعض قيم ذ ، ت المتناظرة معطاة في الجدول التالي:

ت	صفر	1	2	3	4	5
ذ	صفر		6		4	

(أ) احسب قيم ذ الناقصة

(ب) مستخدمًا مقياس رسم 2سم لتمثل ثانية واحدة على المحور الأفقي، 2سم لتمثل 1م على المحور الرأسي، ارسم الشكل البياني للعلاقة

ذ = 5 ت - ت^2.

استخدم رسمك البياني في إيجاد.

(جـ) (i) السرعة عندما ت = 1

(ii) السرعة عندما (ت) = 3

(iii) قيمة (ت) عندما تكون السرعة صفرًا.

(vi) أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

6- يتحرك جسم دقيق في خط مستقيم بحيث يعطي بعده المسافة (ذ) بالمتر من نقطة محددة بالعلاقة

ذ = 3 ت^2 - 12 ت + 5

القيم المناظرة لكل من ذ، ت معطاة في الجدول التالي:

ت	صفر	1	2	3	4	5
ذ	أ	-4	ب	-4	5	حـ

(أ) احسب قيم أ، ب ، حـ

(ب) مستخدمًا مقياس رسم 2سم ليمثل 1 ثانية على المحور الأفقي، 2 سم ليمثل 5 أمتار على المحور الرأسي.

ارسم الشكل البياني للعلاقة

ذ = 3 ت^2 - 12 ت + 5.

(جـ) استخدم رسمك البياني في تقدير:

(i) السرعة عندما ت = 1

(ii) السرعة عندما ت = 4

(iii) قيمة (ت) التي عندها تكون السرعة صفرًا.

7- أطلقت قذيفة من نافذة مبنى مقام على أرض أفقية السطح. وفي أي لحظة ت بالثواني، سرعتها ع م/ث معطاة بالعلاقة:

ع = 3 + 6 ت - 2 ت^2

القيم المتناظرة لكل من ت، ع معطاة في الجدول التالي:

ت	صفر	1	2	3	4	5
ع	3	أ	7	ب	-5	حـ

(أ) احسب قيم أ، ب ، حـ

(ب) عندما ت = 4، فإن ع = -5، فسر معنى السرعة السالبة.

(جـ) مستخدمًا مقياس رسم 2سم ليمثل 1 ثانية على المحور الأفقي، 2 سم ليمثل 5م/ث على المحور الرأسي، ارسم الشكل البياني للعلاقة

ب = 3 + 6 ت - 2 ت^2

(د) استخدم رسمك البياني في تقدير:

(i) قيمة (ت) عندما تكون السرعة = صفر.

(ii) العجلة عندما يكون الزمن ت = 1،

(iii) العجلة عندما تكون ت = 3

8- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال على ورقة رسم بياني واحدة.

يتحرك جسم دقيق في خط مستقيم أب بحيث بعد (ت) ثانية تعطى سرعته ع م/ث في اتجاه أب بالعلاقة.

ع = 2 ت^2 - 9ت + 5

القيم المتناظرة لكل من ت، ع معطاة في الجدول التالي:

ت	صفر	1	2	3	4	5	6	7
ع	5		-5	-4	1	10	23	

احسب قيمة ع عندما ت = 1

وقيمة ع عندما ت = 7

مستخدمًا مقياس رسم 2سم ليمثل 1 ثانية على المحور الأفقي، 2سم ليمثل 5 م/ث على المحور الرأسي، ارسم المنحنى الشكل البياني للعلاقة.

ع = 2 ت^2 - 9 ت + 5

حيث صفر ≤ ت ≤ 7

استخدم رسمك البياني في إيجاد:

(أ) قيمة (ت) عندما تكون السرعة = صفر.

(ب) الزمن الذي عنده تصبح العجلة = صفر.

(جـ) العجلة بعد 6 ثواني.

9- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

يرتبط المتغيران س ، ص بالمعادلة:

$$ص = \frac{س^2}{5} + \frac{12}{س} - 4$$

بعض القيم المتناظرة مقربة لأقرب رقم عشري واحد معطاة في الجدول التالي.

س	1	1.5	2	3	4	5	6	7
ص	8.2	4.5	2.8	ت	2.2	3.4	5.2	7.5

(أ) احسب قيمة (ت)

(ب) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين ارسم الشكل البياني للعلاقة

$$ص = \frac{س^2}{5} + \frac{12}{س} - 4 \text{ حيث } 1 \geq س \geq 7.$$

(جـ) موضحًا طريقتك، استخدم الرسم البياني لإيجاد حلول المعادلة $\frac{س^2}{5} + \frac{12}{س} = 7$ في الفترة $1 \geq س \geq 7$

(د) (i) ارسم على نفس المحورين القطعة المستقيمة ص = س .

(ii) استخدم رسمك البياني في إيجاد إحداثيات نقطة تقع على المنحنى $ص = \frac{س^2}{5} + \frac{12}{س} - 4$ والتي عندها ميل المماس = 1.

10- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

يرتبط المتغيران س، ص بالمعادلة:

$$ص = س + \frac{6}{س}$$

بعض قيم س،ص المتناظرة معطاة في الجدول التالي:

س	1	1.5	2	2.5	3	4	5	6	8
ص	7	5.5	5	4.9	5	5.5	6.2	7	ك

(أ) احسب قيمة (ك).

(ب) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين، ارسم الشكل البياني للعلاقة $ص = س + \frac{6}{س}$ حيث $1 \geq س \geq 8$.

(جـ) أوجد من رسمك البياني قيمة س التي عندها ص = 6

(د) ارسم على نفس الرسم البياني المستقيم $ص = 7 - \frac{س}{2}$ ثم استخدم رسمك البياني في حل المعادلة $س + \frac{6}{س} = 7 - \frac{س}{2}$.

(هـ) برسم مماس مناسب للمنحنى المرسوم. أوجد إحداثيات النقطة التي عندها يكون ميل المماس يساوي $-\frac{1}{2}$.

11- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

يرتبط المتغيران س ، ص بالعلاقة

$ص = \frac{1}{2} س^2 (3 - س)$.

بعض قيم س، ص المتناظرة مقربة لأقرب رقم عشري واحد معطاة في الجدول التالي

س	-1.5	-1.3	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.3	3.5
ص	5.1	3.6	2	0.4	0	0.3	1	1.7	2	1.6	0	-1.6	-3.1

(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين، ارسم الشكل البياني للعلاقة $ص = \frac{1}{2} س^2 (3 - س)$، حيث $-1.5 \geq س \geq 3.5$

(ب) اكتب باستخدام رسمك البياني قيمة أكبر حل للمعادلة $\frac{1}{2} س^2 (3 - س) = 1$

(جـ) برسم المماس للمنحنى . أوجد ميل المنحنى عند النقطة حيث س = 2.5

(د) صف بطريقة كاملة التماثل في الرسم البياني.

12- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

عند إنتاج س نسخ من كتاب، تعطى التكلفة ص دينار لكل نسخة بالعلاقة:

$$ص = \frac{2400}{س} + 10$$

(أ) يعطي الجدول التالي بعض قيم س وقيم ص المتناظرة.

س	100	200	300	400	600	800	1200
ص	34	22	18	16	14	13	ع

(i) أوجد قيمة ع.

(ii) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل 200 كتاب، ارسم المحور الأفقي (محور السينات) حيث صفر ≤ س ≤ 1200، مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل 5 دنانير، ارسم المحور الرأسي (محور الصادات) حيث صفر ≤ ص ≤ 40. ضع نقط الجدول على الرسم البياني ثم صل المنحنى الانسيابي.

(ب) استخدم رسمك البياني لتقدير عدد الكتب التي طبعت إذا كانت تكلفة الإنتاج لكل كتاب 15 دينارًا.

(جـ) (i) برسم المماس، أوجد ميل المنحنى عند النقطة س = 300

(ii) صف باختصار ما يمثله هذا الميل.

(د) لبيع س من الكتب يجب أن يكون سعر بيع الكتاب $\left(25 - \frac{س}{60}\right)$ دينار.

(i) على المحورين المستخدمين في الجزء (أ)، ارسم الشكل ص = $25 - \frac{س}{60}$ لقيم س من صفر إلى 1200

(ii) استخدم رسمك البياني لإيجاد مدى عدد الكتب التي يجب طبعها دون تحقيق خسارة، بفرض أن جميع الكتب ستباع.

13- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

قُذف جسم مباشرة في اتجاه أعلى منحدر وكانت مسافة ع متر التي يبعدها من قاعدة المنحدر بعد زمن ت بالثواني من قذفه معطاة بالجدول التالي.

ت	0	0.5	1	2	3	4	5	6	6.5	7
ع	0	1.58	3.02	5.48	7.38	8.72	9.5	9.72	9.72	9.72

(أ) مستخدمًا مقياس رسم أفقي 2 سم ليمثل 1 ثانية ومقياس رسم رأسي 1 سم ليمثل 1 متر. ارسم الشكل البياني لقيم ت مقابل ع.

(ب) استخدم رسمك البياني لإيجاد بعد الجسم عن قاعدة المنحدر عندما ت = 2.5

(جـ) ماذا يحدث للجسم بعد حوالي 6 ثواني؟

(د) (i) برسم المماس، أوجد ميل المنحنى عندما ت = 4

(ii) حدد باختصار ماذا يمثل الميل.

(هـ) احسب السرعة المتوسطة للجسم خلال الثواني الست الأولى.

(و) في اللحظة ذاتها التي قذف فيها الجسم، قذف جسم آخر إلى أسفل المنحدر من نقطة تبعد 10 أمتار من القاعدة.

تحرك هذا الجسم مباشرة إلى أسفل المنحدر بسرعة ثابتة 2م /ث.

(i) على نفس المحورين، ارسم الشكل البياني الذي يوضح موقع هذا الجسم.

(ii) استخدم رسمك البياني في إيجاد زمن تلاقي الجسمين.

14- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

يرتبط المتغيران س ، ص بالمعادلة

$$ص = \frac{س^2}{6} + \frac{12}{س} - 6$$

يعطي الجدول في الصفحة التالية بعض قيم س، ص المتناظرة. لقد صححت قيم ص لأقرب رقم عشري واحد حيث يكون ذلك ملائمًا.

س	1	1.5	2	3	4	5	6	7
ص	6.2	2.4	0.7	0.5-	0.3-	0.6	2	ك

(أ) احسب قيمة ك لأقرب رقم عشري واحد .

(ب) مستخدمًا مقياس 2 سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين، ارسم المحور الأفقي حيث صفر ≤ س ≤ 8، محور الصادات حيث -1 ≤ ص ≤ 7 ضع على المحاور النقط المعطاة في الجدول ثم صل بينها بمنحنى انسيابي.

(جـ) برسم مماس، أوجد ميل المنحنى عند النقطة (1.5، 2.4).

(د) عارضًا طريقتك بوضوح، استخدم الرسم البياني لإيجاد قيم س في الفترة 1 ≤ س ≤ 7 والتي عندها $\frac{س^2}{6} + \frac{12}{س} = 7$

(هـ) (i) ارسم على نفس المحاور الشكل البياني للقطعة المستقيمة ص = $\frac{س}{4}$.

(ii) مستخدمًا رسمك البياني أوجد قيم س في الفترة 1 ≤ س ≤ 7 والتي عندها $\frac{س^2}{6} + \frac{12}{س} - 6 \geq \frac{س}{4}$.

15- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

يعطي الجدول التالي بعض قيم س وقيم ص المتناظرة وذلك لأقرب رقمين عشريين للعلاقة ص = $\frac{1}{4}$ (س^3 - 6س^2 + 8س)

س	1-	0.5-	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
ص	3.75-	1.41-	0	0.66	0.75	0.47	0	0.47-	0.75-	0.66-	0	1.41	3.75

(أ) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين، ارسم المحور الأفقي حيث -1 ≤ س ≤ 5، المحور الرأسي حيث -4 ≤ ص ≤ 4.
ضع النقط المعطاة في الجدول السابق على رسمك البياني ثم صل بينها بمنحنى انسيابي.

(ب) صف تماثل هذا المنحنى .

(جـ) استخدم رسمك البياني في حل المعادلات.

(i) $\frac{1}{4}$ (س^3 - 6س^2 + 8س) = -1

(ii) س^3 - 6س^2 + 8س = 8

(د) ارسم المماس. ثم أوجد ميل المنحنى عند نقطة الأصل.

(هـ) المستقيم ص = م س يقطع المنحنى ص = $\frac{1}{4}$ (س^3 - 6س^2 + 8س) في ثلاث نقط. أوجد أقل قيمة ممكنه لـ (م).

16- أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني واحدة.

يعطي الجدول التالي بعض قيم س وقيم ص المتناظرة لأقرب رقمين عشريين حيث ص = س (1 + س) (4 - س).

س	1-	0.5-	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
ص	0	1.13-	0	2.63	6	9.38	ى	13.13	12	7.88	ط

(أ) (i) أوجد قيمة كل من ى ، ط

(ii) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل كل وحدة على محور السينات، ارسم المحور الأفقي حيث -1 ≤ س ≤ 4
ومستخدمًا مقياس رسم 1 سم لكل وحدة على محور الصادات، ارسم المحور الرأسي حيث -2 ≤ ص ≤ 14
ضع نقط الجدول على المحورين، ثم صل بين هذه النقط بمنحنى انسيابي.

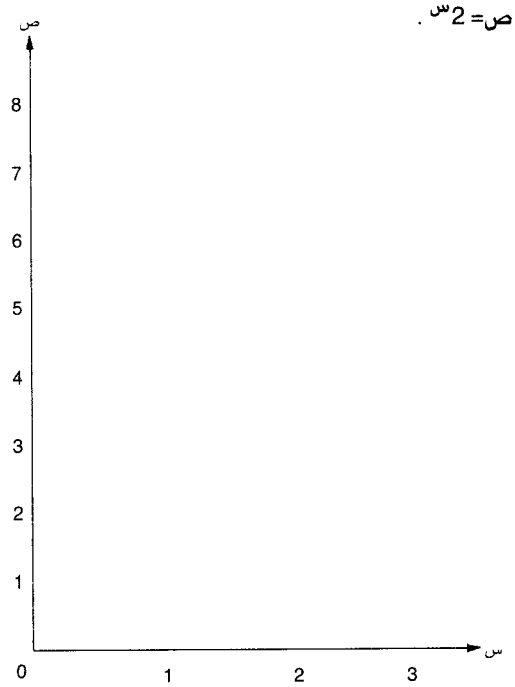
(iii) مستخدمًا رسمك البياني، أوجد قيم س التي عندها ص = 3

(ب) برسم مماس، أوجد ميل المنحنى عند النقطة حيث س = 3

(جـ) على المحورين المستخدمين في الجزء (أ) . ارسم الشكل البياني للمنحنى ص = 10 - س لقيم س في الفترة -1 ≤ س ≤ 4

(د) اكتب واختصر المعادلة التكعيبية التي تتحقق بقيم س عند النقط التي يتقاطع فيها المنحنيان البيانيان.

17- يبين الشكل المرسوم الرسم البياني للعلاقة ص= $2^{س}$.



(أ) برسم مماس، قدر ميل المنحنى عند النقطة س = 2

(ب) استخدم رسمك البياني في إيجاد قيمة

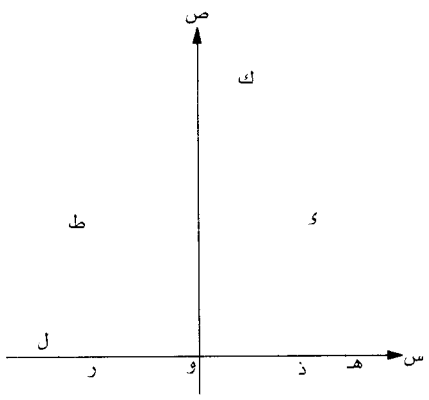
(i) $2^{2.5}$

(ii) ب إذا كان $2^{ب}$ = 5

18- جميع عناصر هذا السؤال يجاب عنها في ورقة رسم بياني واحدة.

يبين الشكل المرسوم المنحنى ص = 36 – $س^2$.

يقطع المنحنى محوري الإحداثيات في النقط هـ ، ك، ل. فإذا كانت (و) نقطة الأصل



(أ) وضح أن مساحة Δ و هـ ك = 108 وحدة مربعة.

إذا وقعت النقطة ء على المنحنى بين (هـ) و (ك). وبفرض أن إحداثيات النقطة (ء) هي (س، ص) وكان الشكل ء ط ر ذ مستطيلًا بحيث تقع النقطة ط على المنحنى بينما تقع النقط ر، ذ على محور السينات وبفرض أن مساحة المستطيل د ط ر ذ (أ) وحدة مربعة.

(ب) اثبت أن أ = 72س – $2س^3$.

(جـ) يعطي الجدول التالي بعض قيم س وقيم أ المناظرة لها حيث أ = 72س – $2س^3$.

س	0	1	2	3	4	5	6
أ	0	70	128	ت	160	110	صفر

(i) أوجد قيمة ت

(ii) مستخدمًا مقياس رسم 2 سم ليمثل كل وحدة ارسم محور السينات الأفقي حيث 0 ≤ س ≤ 6

ومستخدمًا مقياس رسم 1 سم ليمثل 20 وحدة. ارسم المحور الرأسي أ حيث 0 ≤ أ ≤ 180.

وضع على المحورين النقط المعطاة في الجدول ثم صل بينها بمنحنى انسيابي.

(iii) استخدم رسمك البياني لإيجاد قيمتين لـ س عندما أ = 108

(iv) أوجد طول أضلاع المستطيل ء ط ر ذ عندما تكون مساحته تساوي مساحة Δ و هـ ك، ويكون ء ط أقل من 4 وحدات.

1- يمكن تبسيط الكسور الجبرية عن طريق اختصار العوامل المشتركة بين كل من البسط والمقام.

2- عند ضرب الكسور الجبرية
(أ) يجب اختصار العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام.
(ب) تضرب العوامل المتبقية في البسط في بعضها،وكذلك العوامل المتبقية في المقام.

3- لقسمة الكسر الجبري على آخر بدل علامة (÷) إلى (X)، ثم اقلب المقسوم عليه وقم بعد ذلك بعملية الضرب.

4- القاعدة العامة عند تبسيط الكسور الجبرية هي أولًا التحليل إلى عوامل قبل اختصار العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام.

5- عند جمع أو طرح الكسور الجبرية.
(أ) أوجد المضاعف المشترك الأدنى للمقامات.
(ب) عبر عن كل كسر جبري بنفس المقام المشترك (توحيد المقامات) باستخدام المضاعف المشترك الأدنى الذي حصلت عليه.
(جـ) بعد ذلك اجمع أو اطرح البسط كما هو مطلوب.
(د) اختصر الإجابات إلى أبسط صورة كلما استطعت.

6- عند حل المعادلات المتضمنة كسورًا جبرية.
(أ) عبر عن الكسور بنفس المقام مستخدمًا (المضاعف المشترك الأدنى)
(ب) أوجد مفكوك كل من البسط والمقام.
(جـ) أجر عملية الضرب التبادلي ثم حل المعادلة الناتجة.

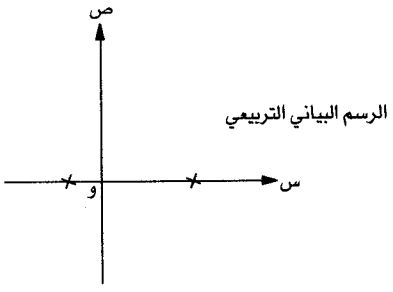
7- مثال لصيغة رياضية
$م = \frac{1}{2} (أ + ب) ع$ حيث تكون م المتغير التابع.

8- قواعد تحويل الصيغة الرياضية.
(أ) لحذف الحد السالب من أحد الطرفين، أضف مكافئه الموجب إلى الطرفين.
(ب) لحذف الحد الموجب من أحد الطرفين، أضف مكافئه السالب إلى الطرفين.
(جـ) لحذف المقام من أحد الطرفين، اضرب كلا الطرفين في المقام.
(د) لحذف المعامل من أحد الطرفين، اقسم كلا الطرفين على المعامل.
(هـ) للتخلص من علامة ($\sqrt{\ }$) في أحد الطرفين، نربع كلا الطرفين.
(و) للتخلص من عملية التربيع في أحد الطرفين، نأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

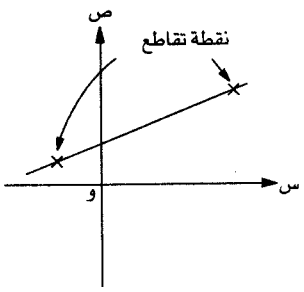
9- المتتابعة العددية هي سلسلة من الأعداد المتتالية تتبع نمطًا معينًا ، على سبيل المثال.

1، 3، 5، 7، 9، ..... وكذلك 1، 9، 25، 49، 81، .....

10- يمكن الحصول على حل المعادلة التربيعية أ س^2 + ب س + حـ = صفر من الرسم البياني التربيعي للعلاقة ص = أ س^2 + ب س + حـ حيث يقطع محور السينات (انظر الشكل (1)) حيث أ ، ب، حـ ثوابت، أ ≠ صفر.



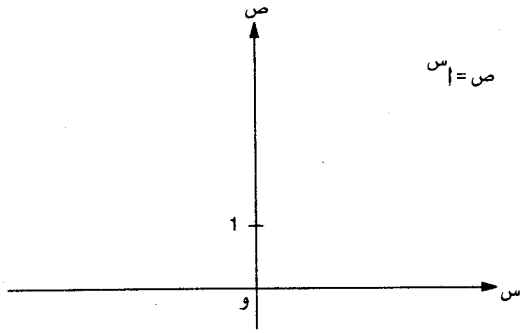
شكل (1)



شكل (2)

11- بصفة عامة، الحل البياني للمعادلة التربيعية في س. يعطى بالإحداثي السيني أو الإحداثيات السينية لنقطة (نقط) تقاطع المنحنى مع القطعة المستقيمة. (انظر شكل (2)) . أحيانًا لا يقطع أي خط المنحنى. وفي هذه الحالة يقال إن المعادلة التربيعية ليس لها حل.

12- الرسم البياني للدالة الأسية التي على الصورة ص = أ^{س} (حيث أ كمية ثابتة > 1) يقطع محور الصادات في النقطة (صفر، 1)



13- ميل المنحنى عند نقطة يساوي ميل المماس عند نفس النقطة.

"أعداد فيبوناتشي"

المتتابعة العددية 1، 1، 2، 3، 5، ... يتم الحصول عليها عن طريق إيجاد مجموع الحدين المتتاليين ليعطي الحد التالي. مثلًا

1 + 1 = 2، 1 + 2 = 3، 2 + 3 = 5 وهكذا

استمدت هذه المتتابعة العددية اسمها من عالِم الرياضيات الإيطالي الشهير "ليوناردوا دابيزا" الذي غالبًا ما يدعى "فيبوناتشي" والكلمة مكونة من مقطعين "فيليوس بوناتشي" وتعني ابن بوناتشي" والذي ولد في مدينة "بيزا" حوالي عام 1170 وعاش حتى عام 1230، وبدأ إنشاء برج "بيزا المائل" الشهير في حياته ولكنه لم يكتمل لحوالي قرنين من الزمن.

ولقد تعلم هذا العالم في مدينة "بوجيا" وسافر حول مدن البحر الأبيض المتوسط يجمع المعلومات حول الرياضيات. وفي عام 1202 عاد إلى مدينة "بيزا" ونشر Liber Abaci ، وهو كتاب أرسى ولوج الترقيم العربي في أوروبا ووفر أساسًا لتنمية مستقبلية في الحساب والجبر. ولقد ناقش موضوعات مثل العمليات الأساسية (الضرب، والجمع، والطرح، والقسمة) والكسور، وأسعار السلع، والمقايضة، وحل المشكلات، والجذر التربيعي. وذكر أيضًا العديد من طرق العد - العربية، والمعداد، والعد على الأصابع.

1- اكتب فيما يلي الخمسين حدًّا الأولى من المتتابعة (أعداد فيبوناتشي). وتذكر أن الحدين الأولين هما 1 لأي منهما. والحد الخمسين يكون 610

2- ما نوع كل عدد ثالث؟

3- هل كل عدد رابع (يأتي في الدورة الرابعة) يقبل القسمة على 3، وكل عدد خامس (يأتي في الدورة الخامسة) يقبل القسمة على 5، والعدد الخمسين يقبل القسمة على 10؟

4- أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى وقارن إجابتك بالحد السابع.

5- اجمع الاثنى عشر عددًا من أعداد "فيبوناتشي"، ثم ابحث عن عدد آخر مرتبط به.

6- هل يمكنك تخمين مجموع الثلاثة عشر حدًّا الأولى من المتتابعة بدون جمعها؟

7- يوجد أربعة "أعداد فيبوناتشي" متتالية 2، 3، 5، 8

اضرب العددين الموجودين على الإحاطة أول رقم وآخر رقم 2 × 8 = 16

اضرب العددين الموجودين في المنتصف 3 × 5 = 15

ما الفرق بينهما؟

جرب هذا الإجراء مع مجموعات أخرى من أربعة حدود متتالية.

3 2 1 1

5 3 2 1

1 3 8 5 3

2 1 1 3 8 5

5 5 3 4 2 1 1 3

هل تحصل دائمًا على نفس الإجابة؟

8- هل من الممكن رسم مثلث أطوال أضلاعه الثلاثة هي ثلاثة أعداد "فيبوناتشي" متتالية.

9- تكعيب أعداد "فيبوناتشي".

إذا رمزنا لكل عدد (حد) في المتتابعة بالرموز $ت_1$، $ت_2$، $ت_3$، .... إلخ،

نكتب 1، 1، 2، 3، 5، 8، .....

كما يلي $ت_1$، $ت_2$، $ت_3$، $ت_4$، $ت_5$، $ت_6$، .....

ولهذا نحصل على $ت_3^3 = {}^3 2 = 8$

$ت_2^3 = {}^3 1 = 1$

$ت_1^3 = {}^3 1 = 1$

لاحظ أن $ت_3^3 + ت_2^3 - ت_1^3 = 8 + 1 - 1 = 8 = ت_6$

نحصل أيضًا على $ت_4^3 + ت_3^3 - ت_2^3 = {}^3 3 + {}^3 2 - {}^3 1$

$= 27 + 8 - 1$

$= 34$

$= ت_9$

جرب هذا الإجراء مع حدود أخرى.

ما النمط الذي تلاحظه؟

10- حاصل ضرب الحد الأول والأخير من أي ثلاثة أعداد "فيبوناتشي" متتالية أقل دائمًا من مربع الحد الأوسط بمقدار واحد.

على سبيل المثال 8 13 21 ← $168 = 21 \times 8$

$169 = {}^2 13$

168 هي $168 < 169$

جرب هذا في أربعة أمثلة أخرى لنفسك.

القسم أ

1- اختصر:

(أ) $\frac{أ^{12}}{18}$ (ب) $\frac{12 أب}{أ^3}$ (جـ) $\frac{9 حـ^4}{3 حـ}$ (د) $\frac{م^3}{2 ن م}$

2- اختصر:

(أ) $\frac{س + 3}{ص (س + 3)}$ (ب) $\frac{(س - 1)(س + 2)}{(س - 1)^2}$

(جـ) $\frac{س - 3}{(س + 3)(س - 3)}$ (د) $\frac{س - 4}{16 - س^2}$

3- اختصر:

(أ) $\frac{أ ب}{2 حـ} \times \frac{4 حـ}{أ^3}$ (ب) $\frac{ر^2}{2} \div \frac{ر}{4}$

(جـ) $\frac{5 حـ}{8} + \frac{حـ}{6} - \frac{3 حـ}{4}$ (د) $\frac{ك + 2}{4} - \frac{ك}{6}$

4- اختصر

(أ) $\frac{أ^2 + أ ب}{أ ب}$ (ب) $\frac{س - 2}{س^2 + س - 6}$

(جـ) $\frac{أ + 2}{3} + أ$ (د) $\frac{ب - 1}{2} - \frac{ب - 2}{4}$

القسم ب

5- عبر عما يأتي في صورة كسر وحيد:

(أ) $\frac{1}{أ} - \frac{3}{أ2}$ (ب) $\frac{1}{3ب} + \frac{2}{ب^2}$

(جـ) $س + \frac{4}{س}$ (د) $\frac{3}{س ص} + \frac{ص}{2س}$

6- (أ) اختصر:

(i) $\frac{3ى + 6ن}{ى^2 + 4ىن + 4ن^2}$ (ii) $\frac{3أ - 6ب}{2ب - أ}$

(iii) $\frac{4س^2 - ص^2}{2س + ص}$

(ب) عبر عما يأتي في صورة كسر وحيد:

(i) $\frac{1}{س + 4} - \frac{1}{س + 3}$

(ii) $\frac{3}{(س - 4)(س + 5)} + \frac{2}{س - 4}$

7- (أ) حل المعادلات الآتية:

(i) $\frac{4}{5} = \frac{2}{3س}$

(ii) $\frac{4}{أ + 2} + \frac{5}{أ + 3} = 2$

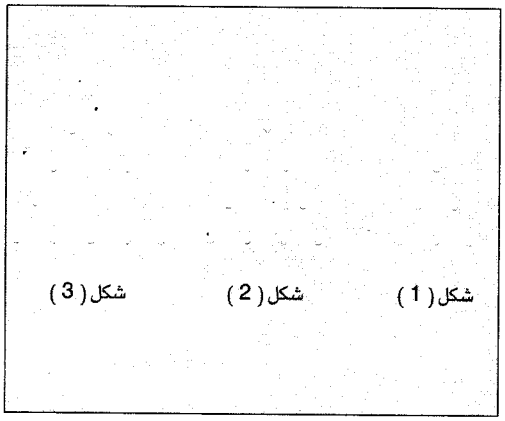
(iii) $\frac{5}{4 - م^2} - \frac{3}{2 - م} = 2$

(ب) إذا كانت $ن = \sqrt{ى^2 + 2أ ذ}$

(i) عبر عن أ بدلالة ن ، ى ، ذ

(ii) أوجد قيمة أ عندما ن = 26، ى = 24، ذ = 5.

8- يتكون كل شكل في المتتابعة التالية من عدد من النقاط.



(أ) ارسم الشكل الرابع من المتتابعة

(ب) انقل وأكمل الجدول التالي.

الشكل	1	2	3	4
عدد النقط	6	9		

(جـ) بدون رسم أشكال أخرى حدد عدد النقاط في

(i) الشكل العاشر (ii) الشكل رقم 100

(د) ما الشكل الذي يحتوي 90 نقطة؟

(هـ) عدد النقط في الشكل رقم ن عبِّر عنها بدلالة ذ. اكتب المعادلة التي تعبر عن ذ بدلالة ن.

القسم جـ

9- يبين الجدول التالي القيم الخاصة بالمعادلة:

$ص = 3 + 4س - 2س^2$

س	2-	1-	0	1	2	3	4
ص	13-	3-	3	5	3	3-	13-

(أ) مستخدمًا 2 سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات و2 سم لتمثل وحدتين على محور الصادات، ارسم الشكل البياني للعلاقة $ص = 3 + 4س - 2س^2$ عندما $-2 \leq س \leq 4$

(ب) استخدم رسمك البياني لتقدير الحل مقربًا لأقرب رقم عشري واحد للمعادلات:

(i) $3 + 4س - 2س^2 =$ صفر

(ii) $7 + 4س - 2س^2 =$ صفر

(iii) $1 + 5س - 2س^2 =$ صفر

10- يرتبط المتغيران س، ص بالمعادلة $ص = 2^س - 3$. بعض قيم س، ص المتناظرة معطاة في الجدول التالي.

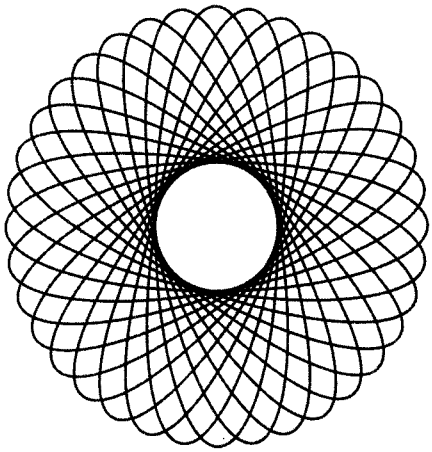
س	3-	2-	1-	0	1	2	3
ص	2.88-	2.75-	أ	2-	ب	1	5

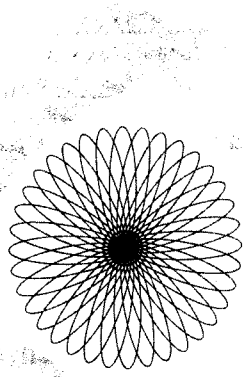
(أ) احسب قيمة أ، ب.

(ب) مستخدمًا 2 سم لتمثل وحدة واحدة على محور السينات و2 سم لتمثل وحدتين على محور الصادات، ارسم العلاقة $ص = 2^س - 3$ عندما $-3 \leq س \leq 3$

(جـ) برسم ماس مناسب للمنحنى، أوجد قيمة ميل المنحنى حيث س = 1

2 المتباينات، والمحال الهندسية، وحساب المثلثات
Inequalities, Loci and Trigonometry





الأنماط السابقة معقدة وجميلة ويمكن الحصول عليها باستخدام نقطة متحركة على قرص دائري يخضع لحركات معينة على قرص دائري آخر. و قد تؤدي دراسة المَحَلّ الهندسي وتجريب المفاهيم التي تعلمتموها إلى كشف سر هذه الأنماط المدهشة.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على:

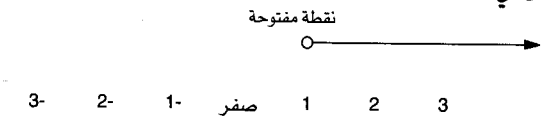
- توضيح المتباينة على خط الأعداد.
- حل المتباينات باستخدام العمليات الأساسية الأربعة.
- حل المتباينتين الآنيتين.
- التعرف على وإنشاء المحال الهندسية للنقط التي تقع في بعدين.
- حل مشكلات تتضمن تقاطع المحال الهندسية.
- حل مشكلات على المحال الهندسية تتضمن المساحات.
- وصف المحال الهندسية في ثلاثة أبعاد.
- حل مشكلات حساب المثلثات التي تتضمن ثلاثة أبعاد.

1-2 المتباينات على خط الأعداد Inequalities on a Number Line

أي عدد يمكن تمثيله على خط الأعداد.

الأعداد التي تقع على يمين عدد معين س تعتبر أكبر من س، والتي تقع على اليسار تعتبر أصغر من س.

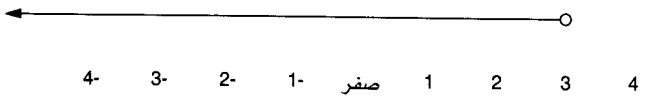
على سبيل المثال الأعداد الأكبر من 1 (بمعنى س > 1) يمكن بيانها على خط الأعداد كما يلي:



ملحوظة

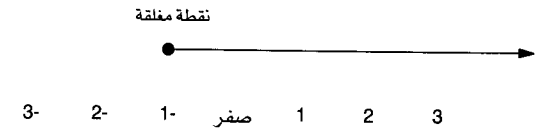
في هذا الكتاب، لا تتضمن النقطة "المفتوحة" القيمة التي عند طرفها.

النقطة (المفتوحة) تعني أن العدد الذي تحتها مباشرة غير متضمن فيها، وبالمثل مجموعة الأعداد الأقل من 3 يمكن توضيحها كما يلي:

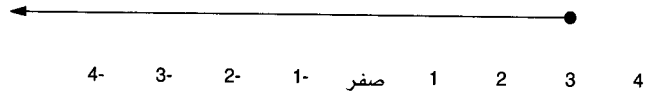


بالنسبة لـ س ≤ -1، فإن العدد -1 متضمن ومثل على خط الأعداد بنقطة (مغلقة).

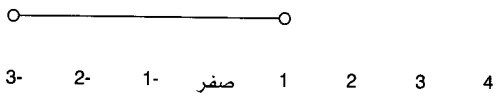
في هذا الكتاب، تتضمن النقطة "المغلقة" القيمة الموجوده عند طرفها.



وبالمثل س ≥ 3 يمكن تمثيلها كما يلي:



الأعداد التي تقع بين عددين معطيين مثل -3 < س < 1 يمكن أيضًا تمثيلها على خط الأعداد كما يلي:



ومن ناحية أخرى -2 ≥ س ≥ 3 يمكن تمثيلها كما يلي:

1- انقل الآتي ثم ضع علامات التباين المناسبة < أو >

(أ) 2 ☐ 3 (ب) 2 ☐ -3

(جـ) -2 ☐ 3 (د) -2 ☐ -3

(هـ) 9 ☐ 5 (و) 9 ☐ -5

(ز) -9 ☐ 5 (ح) -9 ☐ -5

2- مثّل كلًّا مما يأتي على خط الأعداد:

(أ) س < 1 (ب) س > -4

(جـ) س > 9 (د) س < -9

(هـ) س < -2 (و) س > 7

3- بين كلًّا مما يأتي على خط الأعداد:

(أ) س ≥ 6 (ب) س ≤ -6

(جـ) س ≤ 2 (د) س ≥ -4

(هـ) س ≥ -5 (و) س ≤ 3

4- وضّح كلًّا مما يأتي على خط الأعداد:

(أ) -1 ≤ س ≤ 1 (ب) -2 < س < 3

(جـ) -3 ≤ س < 4 (د) -4 < س ≤ 5

(هـ) 5 ≤ س ≤ 6 (و) -6 < س < -2

(ز) -1 < س ≤ -3 (ح) -2 ≤ س < -8

2-2 حل المتباينات عن طريق الجمع أو الطرح

Solving Inequalities by Addition or Subtraction

لندرس المتباينة $2 < 4$

عند إضافة العدد 3 إلى كلا الطرفين

نحصل على $2 + 3 \;?\; 4 + 3$

$5 < 7$

وإذا طرح العدد 3 من كليهما

نحصل على $2 - 3 \;?\; 4 - 3$

$-1 < 1$

وبالمثل لندرس المتباينة $-2 < 2$

عند إضافة العدد 4 إلى كلا الطرفين

نحصل على $-2 + 4 \;?\; 2 + 4$

$2 < 6$

وبطرح العدد 4 من كليهما

نحصل على $-2 - 4 \;?\; 2 - 4$

$-6 < -2$

ولذلك،

جمع أو طرح عدد ما من كلا الطرفين في متباينة يترك علامة التباين بلا تغيير.

حل المتباينة س -1 > 4

ملحوظة

س - 1 > 4

نضيف 1 إلى طرفي المتباينة. س -1 +1 > 4 +1

∴ س > 5

حل المتباينة ص -2 < -1

ص - 2 < -1

نضيف 2 إلى طرفي المتباينة. ص -2 +2 < -1 +2

∴ ص < 1

حل المتباينة: (أ) أ + 2 > 3 (ب) ب + 5 < -3

(أ) أ + 2 > 3

نطرح 2 من طرفي المتباينة. أ + 2 -2 > 3 -2

∴ أ > 1

(ب) ب + 5 < -3

نطرح 5 من طرفي المتباينة. ب + 5 -5 < -3 -5

∴ ب < -8

1- انقل وأكمل المتباينات:

(أ) س - 2 < 7

س - 2 + 2 ☐ 7 + 2

س ☐ 9

(ب) س - 9 ≤ 3

س - 9 + ☐ ≤ 3 + ☐

س ≤ ☐

(جـ) أ + 4 > 9

أ + 4 - 4 ☐ 9 - 4

أ ☐ 5

(د) ك + 2 ≥ 7

ك + 2 - ☐ ≥ 7 - ☐

ك ≥ ☐

2- حل:

(أ) أ - 4 > 2 (ب) ب - 4 ≥ 4

(جـ) حـ - 2 < -4 (د) د - 5 ≤ -1

(هـ) ح - 5 < 5 (و) ف - 5 ≥ -5

(ز) ق - 6 ≤ -3 (ح) هـ - 2 < -7

3- حل كلًّا من المتباينات الآتية:

(أ) $3 > 2 + ع$ (ب) $4 < 3 + ص$

(جـ) $3 \geq 4 + س$ (د) $2 \leq 3 + ـــ$

(هـ) $2- < 2 + ن$ (و) $4- > 5 + ى$

(ز) $1- \geq 5 + ذ$ (ح) $5- < 1 + ـــ$

4- حل كلًّا من المتباينات الآتية ثم مثل إجابتك على خط أعداد.

(أ) $6 > 2- ى$ (ب) $4 < 8 + ك$

(جـ) $1 \geq 5 + ـــ$ (د) $3- \leq 3- ـــ$

(هـ) $2- < 7 + ى$ (و) $1- > 4- ط$

3-2 حل المتباينات عن طريق الضرب أو القسمة

Solving Inequalities by Multiplication or Division

ملحوظة

لا تتغير علامة التباين

نعلم أن المتباينة $4 > 2$ حقيقية. ماذا يحدث إذا ضربنا طرفي المتباينة في عدد موجب وليكن 2 مثلًا؟ هل ستظل العبارة السابقة حقيقية إذا استبقينا علامة (>)؟

$2 < 4$

$2 \times 2 \; ? \; 4 \times 2$

نحصل على $4 > 8$ وهي عبارة حقيقية.

إذا قسمنا بعد ذلك كلا الطرفين في المتباينة على عدد موجب وليكن 2

نحصل على $2 < 4$

مرة ثانية، لا تتغير علامة التباين

$\frac{2}{2} \; ? \; \frac{4}{2}$

أي، $1 < 2$ وهي عبارة حقيقية أيضًا.

ولذلك،

ضرب أو قسمة طرفي المتباينة في عدد موجب يترك علامة التباين بدون تغيير.

دعنا ننظر مرة أخرى إلى المتباينة $4 > 2$. إذا ضربنا كلًّا من طرفي المتباينة في عدد سالب وليكن -2 مثلًا، هل ستظل العبارة السابقة حقيقية إذا استبقينا علامة (>)؟

تنعكس علامة التباين

نحصل على $2 < 4$

$\therefore 4 \times (-2) \; ? \; 2 \times (-2)$

$8- > 4-$

حاول قسمة كلا الطرفين في المتباينة $4 > 2$ على عدد سالب، وليكن (-2)، ماذا يمكنك استنتاجه؟

بصفة عامة،

ضرب أو قسمة طرفي المتباينة في عدد سالب يعكس علامة التباين. بمعنى:

$>$ تتغير إلى $<$

$<$ تتغير إلى $>$

$\leq$ تتغير إلى $\geq$

$\geq$ تتغير إلى $\leq$

حل المتباينات الآتية:

(أ) $\frac{م}{2} \leq 9$ (ب) $\frac{ذ}{3} > -4$ (جـ) $-\frac{أ}{4} < 8$

ملحوظة

(أ) اضرب طرفي المتباينة × 2

(ب) اضرب طرفي المتباينة × 3

(جـ) اضرب طرفي المتباينة × -4 يعكس علامة التباين

(أ) $\frac{م}{2} \leq 9$

$2 \times \frac{م}{2} \leq 9 \times 2$

$م \leq 18$

(ب) $\frac{ذ}{3} > -4$

$3 \times \frac{ذ}{3} > -4 \times 3$

$ذ > -12$

(جـ) $-\frac{أ}{4} < 8$

$-\frac{أ}{4} \times (-4) > 8 \times (-4)$

$أ > -32$

حل المتباينات التالية:

(أ) $3س \leq 12$ (ب) $5ص \geq -10$ (جـ) $-2أ < 4$

(أ) اقسم طرفي المتباينة على 3.

(ب) اقسم طرفي المتباينة على 5

(جـ) اقسم طرفي المتباينة على -2 إن ذلك يعكس علامة التباين

(أ) $3س \leq 12$

$\frac{3س}{3} \leq \frac{12}{3}$

$س \leq 4$

(ب) $5ص \geq -10$

$\frac{5ص}{5} \geq \frac{-10}{5}$

$ص \geq -2$

(جـ) $-2أ < 4$

$\frac{-2أ}{-2} > \frac{4}{-2}$

$أ > -2$

1- انقل وأكمل المتباينات الآتية:

(أ) $\frac{أ}{2} > 5$

$\square \times \frac{أ}{2} > \square \times 5$

$\square < أ$

(ب) $-\frac{ب}{3} \leq 2$

$-\frac{ب}{3} \times (-3) \square 2 \times (-3)$

$ب \square -6$

(جـ) $9حـ \geq -6$

$\frac{9حـ}{9} \square -\frac{6}{9}$

$حـ \square -\frac{2}{3}$

(د) $-2ى > 14$

$\frac{-2ى}{\square} \square \frac{14}{\square}$

$ى \square$

2- حل :

(أ) $\frac{ص}{3} \geq 6$ (ب) $\frac{ك}{4} < 4$

(جـ) $\frac{ك}{3} \geq -3$ (د) $\frac{هـ}{5} \leq -\frac{2}{5}$

(هـ) $\frac{أ}{3} - < 4$ (و) $\frac{ط}{4} - > 5$

(ز) $\frac{ب}{5} - > -2$ (ح) $\frac{ف}{4} - \geq 4$

3- حل المتباينات الآتية:

(أ) $2أ < 4$ (ب) $3ب > 18$

(جـ) $2حـ > -6$ (د) $5د \geq -9$

(هـ) $4ر \leq -8$ (و) $-2ف > 36$

(ز) $-3و \geq -9$ (ح) $-3هـ \leq -15$

4- حل كلًّا من المتباينات الآتية:

(أ) $-2ع \geq -18$ (ب) $-3ص > 12$

(جـ) $\frac{س}{2} < 8$ (د) $\frac{س}{8} \leq -3$

(هـ) $-\frac{ن}{5} > -3$ (و) $-\frac{ى}{4} \geq 3$

(ز) $8ذ \leq 6$ (ح) $4ن < -1$

4-2 حل المتباينات التي تتضمن أكثر من عملية واحدة.

Solving Inequalities Involving More Than One Operation

حل كلًّا من المتباينات التالية:

(أ) $2أ + 3 \leq 1$ (ب) $3(ص + 2) \geq 2ص + 1$

(جـ) $\frac{2س}{7} \geq 4$ (د) $\frac{ر + 3}{2} < 4$

ملحوظة

(أ) اطرح 3 من الطرفين.

اقسم الطرفين على 2.

(ب) اطرح 2ص من الطرفين.

اطرح 6 من الطرفين.

(جـ) اضرب الطرفين فى 7.

اقسم الطرفين على 2.

(د) اضرب الطرفين فى 2.

اطرح 3 من الطرفين.

(أ) $2أ + 3 \leq 1$

$2أ + 3 - 3 \leq 1 - 3$

$2أ \leq -2$

$\frac{2أ}{2} \leq \frac{-2}{2}$

$أ \leq -1$

(ب) $3(ص + 2) \geq 2ص + 1$

$3ص + 6 \geq 2ص + 1$

$3ص + 6 - 2ص \geq 2ص + 1 - 2ص$

$ص + 6 \geq 1$

$ص + 6 - 6 \geq 1 - 6$

$ص \geq -5$

(جـ) $\frac{2س}{7} \geq 4$

$\frac{2س}{7} \times 7 \geq 4 \times 7$

$2س \geq 28$

$\frac{2س}{2} \geq \frac{28}{2}$

$س \geq 14$

(د) $\frac{ر + 3}{2} < 4$

$\frac{ر + 3}{2} \times 2 < 4 \times 2$

$ر + 3 < 8$

$ر + 3 - 3 < 8 - 3$

$ر < 5$

حل كلًّا من المتباينات التالية:

(أ) $\frac{1}{4}ن + 5 < 12$ (ب) $-3ص - 7 \geq 2$

(جـ) $-\frac{2}{3}حـ \geq 4$ (د) $\frac{ب - 3}{2} > 5$

ملحوظة

(أ) اطرح 5 من الطرفين.
ضرب الطرفين في -4
غير > إلى < .
(ب) اجمع 7 إلى الطرفين.
قسمة الطرفين على -3
غير ≥ إلى ≤ .
(جـ) اضرب الطرفين في 3.
قسمة الطرفين على -2
يغير ≥ إلى ≤ .
(د) اضرب الطرفين في 2.
اطرح 3 من الطرفين.
قسمة الطرفين على -1
يغير > إلى < .

(أ) $-\frac{1}{4}$ ر + 5 < 12

$-\frac{1}{4}$ ر + 5 − 5 < 12 − 5

$-\frac{1}{4}$ ر < 7

$-\frac{1}{4}$ ر × (−4) > 7 × (−4)

ر > −28

(ب) −3 ص − 7 ≥ 2

−3 ص − 7 + 7 ≥ 2 + 7

−3 ص ≥ 9

$\frac{-3ص}{-3} \leq \frac{9}{-3}$

ص ≤ −3

(جـ) $-\frac{2}{3}$ حـ ≥ 4

$-\frac{2}{3}$ حـ × 3 ≥ 4 × 3

−2 حـ ≥ 12

$\frac{-2حـ}{-2} \leq \frac{12}{-2}$

حـ ≤ −6

(د) $\frac{ب - 3}{2}$ > 5

$\frac{ب - 3}{2} \times 2$ > 5 × 2

ب − 3 > 10

ب − 3 − 3 > 10 − 3

ب > 7

$\frac{-ب}{-1} < \frac{7}{-1}$

ب < −7

1- حل :

(أ) 2 ب + 1 < 5

(ب) 5 س + 2 < 3 س + 8

(جـ) 3 (2 + د²) > 9

(د) 5 (د − 2) ≤ 3 (د + 4)

(هـ) 4 (ى + 3) ≥ 2 (ى − 6)

(و) $\frac{3س}{2}$ ≤ 6

(ز) $\frac{ر + 3}{3}$ < 6

(ح) $\frac{2حـ - 3}{5}$ < 5

2- حل كلًّا من المتباينات الآتية:

(أ) $-\frac{1}{3}$ أ − 1 > −1

(ب) $-\frac{2}{5}$ ب + 2 ≤ −2

(جـ) −3 حـ − 1 ≤ 2

(د) 1 − 2 ى < −3

(هـ) $-\frac{2}{3}$ ح ≤ 6

(و) $-\frac{3ى}{4}$ ≥ 15

(ز) $\frac{ن - 3}{4}$ > 3

(ح) $\frac{1 - 2س}{3}$ < 4

3- حل المتباينة 3 + 4 س < 27

4- حل المتباينة 6 − 5 ص < 4

5- حل المتباينة 4 ك − 1 < 14 + ك

6- حل كلًّا من المتباينات الآتية:

(أ) 2أ − 3 < 17

(ب) 6 (5 − ى) ≥ 36

(جـ) 1 − 2 ح ≤ 3

(د) 5 (ف + 5) < 3 (ف − 1)

(هـ) $\frac{7س}{6}$ ≥ 21

(و) $\frac{5ص + 3}{2}$ > 9

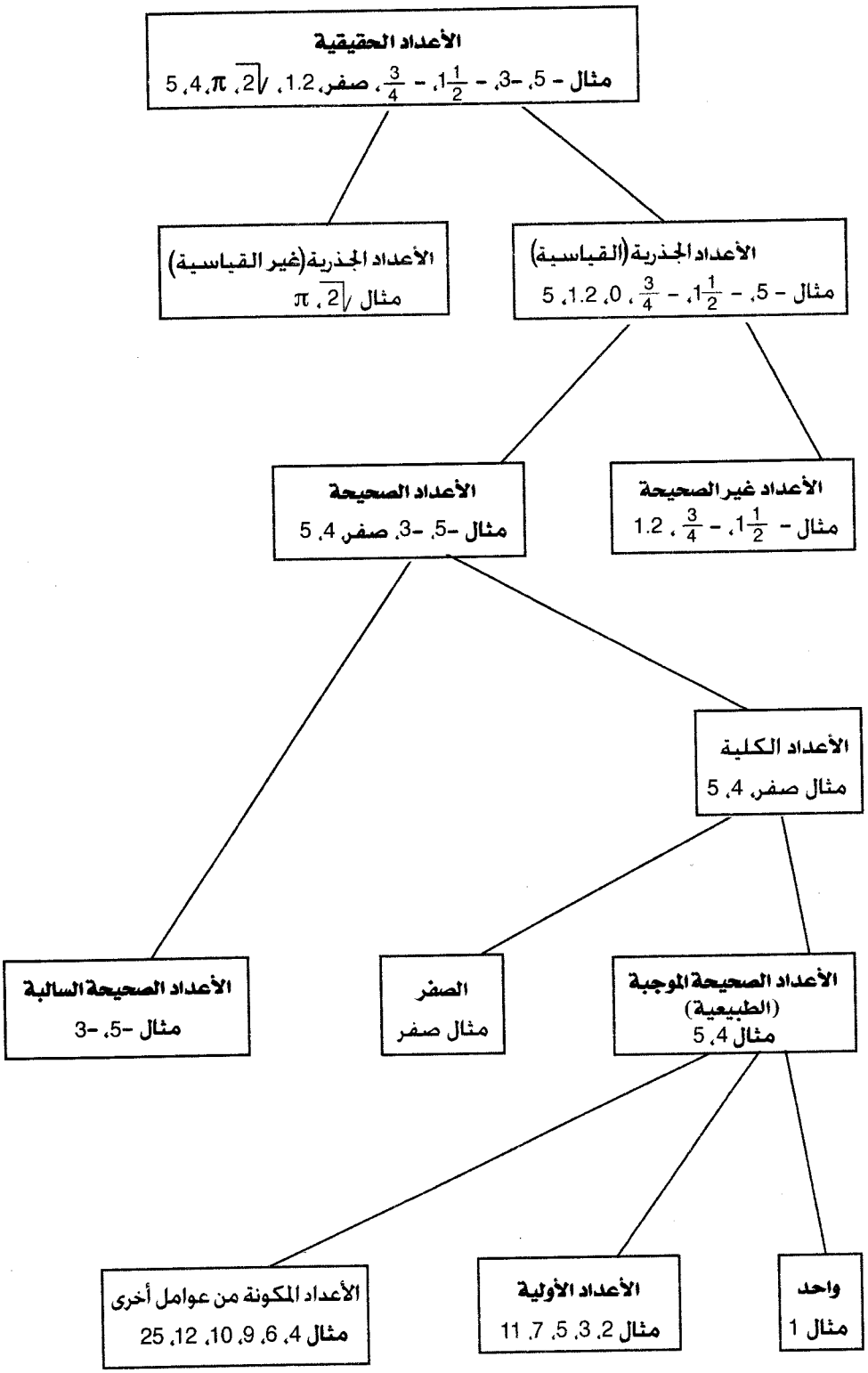
(ز) $-\frac{1}{3}$ ى > ى + 4

(ح) 7 ك > $\frac{3}{2}$ ك + 11

5-2 حل متباينتين أو أكثر في مجهول واحد آنيًا

Solving Two or More Inequalities in One Unknown Simultaneously

قبل حل المزيد من المتباينات، سنستعيد إلى الذاكرة العلاقة بين الأنواع المختلفة للأعداد والتي تتلخص فيما يلي:



ملحوظة

كلمة آنيًّا تعني إيجاد جميع قيم س التي تحقق كلًّا من المتباينتين في نفس الوقت.

حل المتباينتين آنيًّا:

س > 13 و 2 س + 3 ≥ 39

لدينا س > 13 و 2 س + 3 ≥ 39

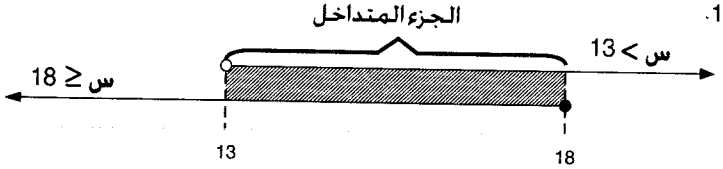
اطرح 3 من كلا الطرفين. 2 س ≥ 39 − 3

2 س ≥ 36

اقسم كلا الطرفين على 2. $س \geq \frac{36}{2}$

س ≥ 18

يمكن رسم خط الأعداد لإيجاد قيم س التي تحقق كلا المتباينتين س > 13 ، س ≥ 18.



إن ذلك يعني تضمن المتباينتين الرقم 18، وليس الرقم 13.

يمثل الجزء المتداخل من الخطين قيم س التي تحقق كلا المتباينتين. ولهذا فإن الحل هو 13 < س ≥ 18.

أوجد جميع قيم س الصحيحة التي تحقق المتباينة 4 س − 5 < 29 ≥ 5 س − 6

ملحوظة

ويعني ذلك أن س هي عدد صحيح.

4 س − 5 < 29 ≥ 5 س − 6

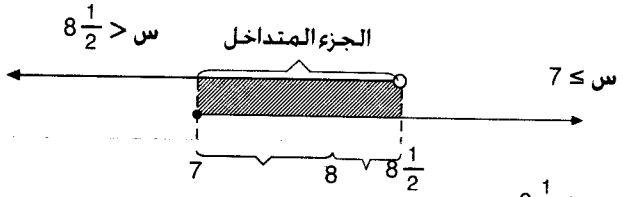
4 س − 5 < 29 و 29 ≥ 5 س − 6

4 س < 34 و 5 س ≥ 35

$س < \frac{34}{4}$ $س \geq \frac{35}{5}$

$س < \frac{17}{2}$ س ≥ 7

ارسم خط الأعداد للحصول على المنطقة المتداخلة ∴ $س < 8\frac{1}{2}$ س ≤ 7



∴ $7 \leq س < 8\frac{1}{2}$

∴ **قيم س الصحيحة هي** 7 ، 8

أوجد قيم س الصحيحة الممكنة إذا كانت $3 < س - 1 < 7$ ، $8 < 2س + 1 < 16$

$$3 < س - 1 < 7$$

تعني ضمنًا أن $3 < س - 1$ و $س - 1 < 7$

$$4 < س \quad \text{و} \quad س < 8$$

$$\therefore \quad 4 < س < 8$$

$$8 < 2س + 1 < 16$$

$$8 < 2س + 1 \quad \text{و} \quad 2س + 1 < 16$$

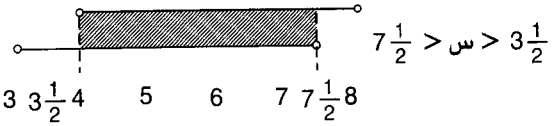
تعني ضمنًا أن $7 < 2س$ و $2س < 15$

$$\frac{7}{2} < س \qquad س < \frac{15}{2}$$

$$3\frac{1}{2} < س \qquad س < 7\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 3\frac{1}{2} < س < 7\frac{1}{2}$$

$4 < س < 8$



∴ قيم س الصحيحة الممكنة هي 5 ، 6 ، 7

1- حل المتباينتين الآتيتين آنيًّا:

(أ) $س < 12$ ، $3س + 4 \geq 55$

(ب) $س > 6$ ، $12 س + 23 \leq 35$

(جـ) $س \leq -2$ ، $س + 3 < 4$

(د) $2س < -4$ ، $6 س + 32 \leq 8$

(هـ) $3 س < 9$ ، $5 س - 4 < 6$

(و) $4 س \leq 10$ ، $3 س - 9 \leq 6$

(ز) $5 س \geq 10$ ، $2س + 7 < 3$

(ح) $6 س \geq 12$ ، $س - 2 < 2$

2- حدد قيم س الصحيحة التي تحقق

(أ) $5س + 6 < 30 \geq 7 س + 9$

(ب) $5س - 6 < 30 < 7 س - 9$

(جـ) $4 \geq 2 س + 5 \geq 9$

(د) $-14 < 10س + 9 < 9$

3- حدد قيم س الصحيحة التي تحقق :

(أ) $3 < س < 6$ ، $8 \geq 2 س \geq 17$

(ب) $7 < س + 2 \geq 9$ ، $10 \geq 2س - 1 > 15$

(جـ) $-5 \geq 3 - س \geq -2$ ، $-11 \geq 10 - 3س \geq 1$

(د) $-1 \geq 2 - 3س < 4$ ، $-1 \geq 1 - 2 س > 3$

4- حدد قيم س الصحيحة التي تحقق:

(أ) $3س - 4 \geq 27 > 4 س - 5$

(ب) $3س + 1 > 23 > 5س - 1$

(جـ) $-9 \geq 5 - 2س \geq -4$

5- حدد قيم س الصحيحة، حيث س عدد أولي

يحقق المتباينتين: $س > 18$ ، $3 س + 2 < 93$

6- أوجد العدد الصحيح ك من المتباينة

$16 < 3 ك - 1 < 20$

7- أوجد العدد الصحيح س عندما 4 < س - 2 < 8،
9 < 2س + 1 < 17

8- أوجد ثلاث قيم س الصحيحة التي تحقق
4س + 6 ≥ 5س - 1 ≥ 4س + 8

9- أوجد العدد الصحيح الموجب س بحيث
س + 1 < 19 < س + 3

10- اكتب جميع قيم س الصحيحة التي عندها
7س > 65، 25 - 2س ≤ 1

11- حدد أي قيمة س بحيث 11 < س + 3 < 12

12- (أ) حل المتباينة الآتية 10س - 4 ≥ 5
(ب) أوجد جميع قيم ص الصحيحة التي عندها
-8 ≥ ص > -3 ، 3 < 2ص + 15

6-2 المزيد من التدريبات على المتباينات More on Inequalities

إذا كانت س عددًا صحيحًا وكان -15 ≥ س > $15\frac{1}{3}$، اكتب:
(أ) أقل قيمة للعدد س.
(ب) أكبر قيمة للعدد س بحيث س مربع كامل.
(جـ) أكبر قيمة للعدد س بحيث س عدد أولي.

(أ) أقل قيمة للعدد س هي -15
(ب) الأعداد المربعة هي 1، 4، 9، 16، .....
∴ أكبر قيمة للعدد س هي 9
(جـ) الأعداد الأولية هي 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، ....
∴ أكبر قيمة للعدد س تكون 13

إذا كان -1 ≥ أ ≥ 4 ، 2.5 ≥ ب ≥ 3.5، احسب:
(أ) القيمة العظمى للكمية أ + ب
(ب) القيمة الصغرى للكمية ب - أ
(جـ) القيمة العظمى للكمية $\frac{أ}{ب}$.

(أ) القيمة العظمى (أ + ب) = القيمة العظمى للعدد (أ) + القيمة العظمى للعدد (ب) = 4 + 3.5 = 7.5

(ب) القيمة الصغرى (ب - أ) = القيمة الصغرى العدد ب - القيمة العظمى للعدد أ = 2.5 - 4 = -1.5

(جـ) القيمة العظمى $\frac{أ}{ب}$ = القيمة العظمى للعدد (أ) ÷ القيمة الصغرى للعدد (ب) = $\frac{4}{2.5}$ = 1.6

1- إذا كان $35 - 4س \geq 13$، أوجد

(أ) قيمة س الصغرى

(ب) أقل قيمة صحيحة لـ س.

2- إذا كان $-3 < س \geq 3\frac{1}{3}$، اكتب

(أ) أكبر قيمة س الصحيحة

(ب) أقل قيمة س الصحيحة

(جـ) أكبر قيمة س النسبية.

3- إذا كانت $س \geq 12\frac{1}{4}$، حدد قيم س العظمى الممكنة إذا كانت

(أ) س عددًا صحيحًا

(ب) س عددًا أوليًّا

(جـ) س عددًا نسبيًّا.

4- إذا كانت س عددًا صحيحًا، وكانت $-35 < س \geq 35$، اكتب

(أ) قيمة س الصغرى

(ب) قيمة س العظمى بحيث س مربع كامل

(جـ) قيمتي س يقبلان القسمة على 7، -3

5- إذا كان $-2 \leq أ \leq 2$ ، $1.5 \leq ب \leq 2.5$، احسب

(أ) أقل قيمة صحيحة $(أ + ب)$

(ب) أكبر قيمة صحيحة $(ب - أ)$

(جـ) أقل قيمة صحيحة $\frac{أ}{ب}$.

6- إذا كان $-3 \leq س \leq 1$، $0.5 \leq ص \leq 1.5$، احسب.

(أ) القيمة العظمى لـ س ص.

(ب) أقل قيمة لـ $2ص - س$

(جـ) القيمة العظمى لـ $\frac{س}{2ص}$.

7- إذا كان $2 \geq أ \geq 5$، $-7 \leq ب \leq -3$، أوجد

(أ) القيمة العظمى للكمية $(أ - ب)$

(ب) أقل قيمة ممكنة للكمية $أ^2 + ب^2$.

8- إذا كان $-2 \leq س \leq 5$ ، $3 \geq ص \geq 12$، $0.3 \geq س \geq 2$، احسب

(أ) أقل قيمة س + ص ممكنة

(ب) أكبر قيمة ص - س ممكنة

(جـ) أكبر قيمة $\frac{ص}{س}$ ممكنة

9- إذا كان $-4 \leq د \leq 3$، $1 \leq ط \leq 5$، أوجد:

(أ) أكبر قيمة د + ط ممكنة

(ب) أكبر قيمة د - ط ممكنة

(جـ) أقل قيمة د ط ممكنة

10- إذا كان $-3 \leq س \leq 2$ ، $-7 \leq ص \leq 3$، أوجد

(أ) أكبر قيمة س - ص ممكنة

(ب) أصغر قيمة $س^2$ ممكنة

(جـ) قيمة ص إذا كان $ص^2 = 36$.

11- (أ) اكتب جميع قيم ن الصحيحة والتي عندها

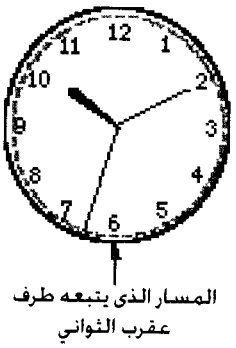
$-2 \leq ن < 4$

(ب) أوجد قيمة س الصغرى عندما

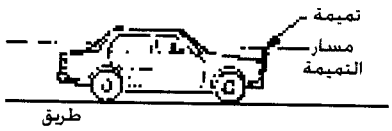
$3 - س < 2$

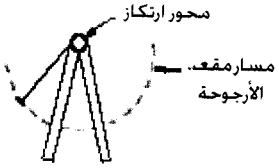
7-2 المحل الهندسي Locus

المحل الهندسي هو المسار الذي تتبعه نقطة تتحرك وفقًا لقيود أو لشروط معينة. فعلى سبيل المثال، المسار الذي يتبعه طرف عقرب الثواني في ساعة اليد هو على شكل دائرة. ومركز هذه الدائرة هو مركز واجهة الساعة وطول نصف قطرها هو طول عقرب الثواني. وبالمثل، فالمحل الهندسي لمقعد أرجوحة هو قوس دائرة، ومركزها هو محور ارتكاز الأرجوحة، وطول نصف قطرها هو طول حبل الأرجوحة.

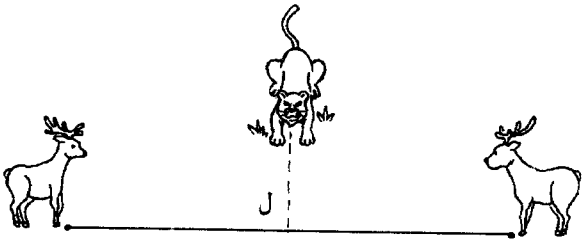


المسار الذي يتبعه طرف عقرب الثواني

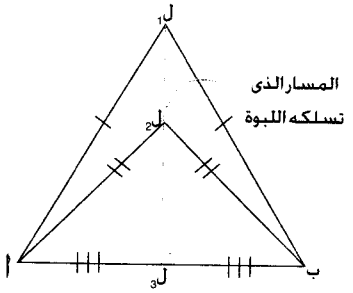




ومن ناحية أخرى، فالمحل الهندسي لتميمة مثبتة في مقدمة سيارة تتحرك على طريق مستو مستقيم هو خط مواز للطريق.



ومثال آخر هو لبوة تتحرك في مسار ببطء بحيث تصبح على مسافة متساوية من فريستين، الغزال أ والغزال ب ، الواقفتان بلا حراك. وعليه فالمحل الهندسي للبوة هو الخط المستقيم المتعامد على أ ب وينصّف الخط الواصل بين أ، ب.



ملحوظة

ل1، ل2، ل3 مواقع لبوة عند اقترابها من الغزال أ والغزال ب.

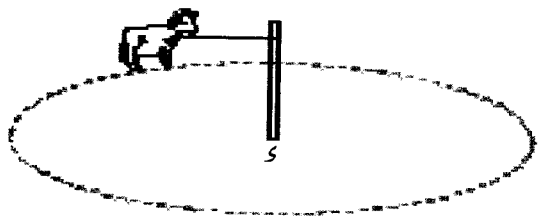
لاحظ أن:

ل1أ = ل1ب

ل2أ = ل2ب

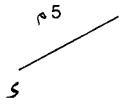
ل3أ = ل3ب

ومثال أخير لبقرة مربوطة إلى عمود (ع) بحبل طوله 5م. فإذا كان الحبل مشدودًا، فيمكن للبقرة التحرك بطول محيط دائرة. وهنا يكون المحل الهندسي للبقرة هو الدائرة التي مركزها (ع) وطول نصف قطرها 5م.

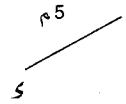


إلا أنه إذا تحركت البقرة حول العمود وكان الحبل مشدودًا أو مرتخيًا، فسيكون المحل الهندسي منطقة دائرية طول نصف قطرها 5م

يمثل الخط المنقوط مجموعة المواقع الممكنة لحركة البقرة والحبل مشدودًا.



تمثل المنطقة المظللة مجموعة المواقع الممكنة لحركة البقرة والحبل مشدودًا أو غير مشدود.



وعليه فالمحل الهندسي قد يكون خطًّا أو منحنىً أو منطقةً مستويةً،... إلخ.

1- ارسم المحل الهندسي لكل مما يأتي:

(أ) ثقل بندول الساعة.

(ب) نهاية ريشة المروحة أثناء حركتها.

(جـ) قمة رأسك أثناء تحرك مصعد لأعلى.

(د) قطعة من الفلين تتذبذب في تيار مائي.

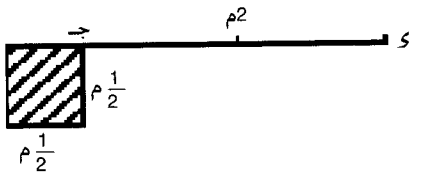
(هـ) حصان في أرجوحة الخيل الخشبية.

(و) كوكب يدور حول الشمس

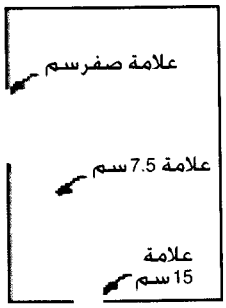
(ز) نهاية ريشة دوارة في قرص الطائرة المروحية أثناء ارتفاعها.

(ح) علامة بالطباشير على إطار دراجة متحركة.

2- يبين الشكل التالي كلبًا (ى) مربوطًا بحبل طوله 2م في ركن عمود مربع الشكل أبعاده $\frac{1}{2}$م × $\frac{1}{2}$م. ارسم المحل الهندسي لحركة سير الكلب المربوط إذا تحرك بحبل مشدود في اتجاه عقارب الساعة حول العمود.



3- (أ) ضع جزءًا طوله 15 سم من المسطرة على صفحة من كراسة التدريبات الخاصة بك بحيث يكون صفر تدريج المسطرة على حافة صفحة الكتاب الرأسية، وعلامة 15 سم على الحافة الأفقية.



(ب) ضع نقطة على الورقة عند النقطة 7.5 سم.

(جـ) كرر الخطوة (أ)، (ب) في اتجاهات مختلفة (حول 15) من المسطرة بحيث يكون صفر تدريج المسطرة دائمًا على الحافة الرأسية والرقم 15 سم عند الحافة الأفقية.

(د) صل النقط لتكون منحنى انسيابيًّا.

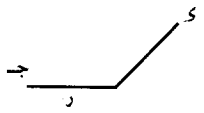
(هـ) ما الشكل الناتج؟

4- كرر السؤال الثالث ولكن ضع في هذه المرة النقط عند علامة 5 سم

8-2 المحال الهندسية في بعدين — Loci in Two Dimensions

لقد تعلمنا أن المحل الهندسي لطرف عقرب الثواني في ساعة الحائط هو دائرة.
ويكون دائمًا طرف عقرب الثواني على مسافة ثابتة من مركز ساعة اليد. وعليه فإن:

المحل الهندسي لنقطة متحركة (ك) على مسافة ثابتة (ر) وحدة من نقطة معطاة (جـ) هو دائرة مركزها (جـ) وطول نصف قطرها (ر) وحدة.



1- في هذا السؤال، سوف نوجد المحل الهندسي لنقطة متحركة تبعد بمسافات متساوية عن نقطتين معينتين.

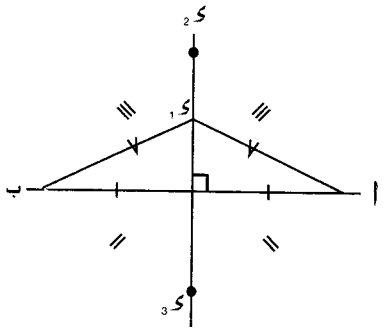
(أ) حدد نقطتين ثابتتين أ، ب على قطعة من الورق.

(ب) ارسم بدقة العمود المنصف للقطعة أ ب.

(جـ) حدد نقطة $ك_1$ على العمود المنصف، هل $أك_1 = ب ك_1$ ؟ هل $ك_1$ تبعد بمسافات متساوية من النقطتين أ، ب

(د) كرر الخطوة (حـ) باستخدام نقط $ك_2$، $ك_3$ .... إلخ.

(هـ) هل كل النقط على العمود المنصف تبعد بمسافات متساوية من أ، ب ؟
ونلاحظ أن المحل الهندسي هو العمود المنصف في كل حالة.

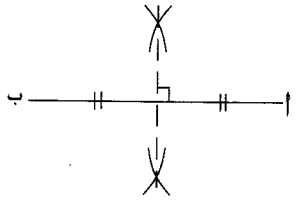


ولهذا فإن:

المحل الهندسي لنقطة متحركة ك التي تبعد بمسافات متساوية عن نقطتين أ، ب هو العمود المنصف للمسافة أ ب.

ملحوظة

لرسم العمود المنصّف للمسافة أ ب



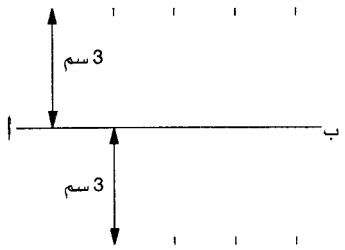
2- (أ) ارسم خطًّا ثابتًا أ ب على قطعة من الورق.

(ب) حدد خمس نقاط على كل جانب من جانبي الخط أ ب بحيث تبعد مسافة 3 سم عن أ ب.

(جـ) بالنسبة لكل جانب صل النقط لتكون قطعتين مستقيمتين.

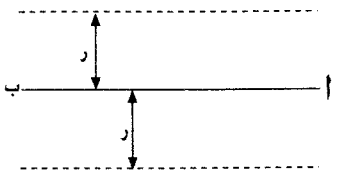
(د) هل القطعتان المستقيمتان توازيان $\overline{أ ب}$ ؟

(هـ) هل كل نقطة على المستقيمين المتوازيين تبعد بمسافة متساوية عن $\overline{أ ب}$؟

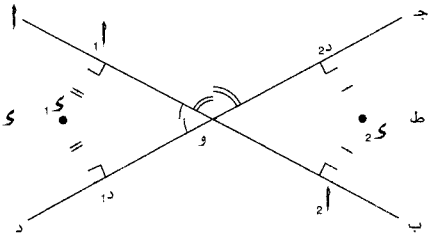


ولهذا فإن:

المحل الهندسي للنقطة المتحركة التي تبعد ر وحدة عن خط معين أ ب هو زوج من الخطوط المتوازية كل منهما يبعد ر وحدة عن $\overline{أ ب}$.



-3



(أ) ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{أ ب}$، حـ ك يتقاطعان فى نقطة و .

(ب) نصِّف ∠ أ و د للحصول على منصف الزاوية ك ط .

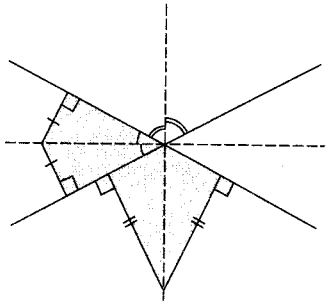
(جـ) حدد النقطة $ك_1$ على ك ط. هل $ك_1$ تبعد بمسافات متساوية عن أ ب، حـ د بمعنى هل $ك_1 أ_1 = ك_1 د_1$؟

(د) حدد نقطة أخرى ولتكن $ك_2$ على ط ك . هل $ك_2 أ_2 = ك_2 د_2$؟

(هـ) هل كل نقطة على الخط د ط تبعد بمسافات متساوية عن $\overline{أ ب}$، $\overline{حـ د}$؟

وبالمثل هل كل نقطة على منصف الزاوية س ص تبعد بمسافات متساوية عن $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ د}$ ؟ (قد ترغب في اختبار ذلك).

ولهذا فإن:



المحل الهندسي لنقطة متحركة تبعد مسافات متساوية من مستقيمين محددين متقاطعين هو زوج المستقيمين اللذين ينصفان الزوايا بين المستقيمين المحددين.

9-2 تقاطع المحال الهندسية Intersection of Loci

في هذا الجزء سوف نرى بعض تطبيقات على تقاطع المحال الهندسية.

أنشئ المثلث س ص ع الذي فيه س ص = 7.6 سم ، قياس ∠ ص س ع = 54°، قياس ∠ س ص ع = 45°، وعلى نفس الرسم

(أ) ارسم المحل الهندسي للنقطة التي تبعد بمسافات متساوية عن س ص، س ع .

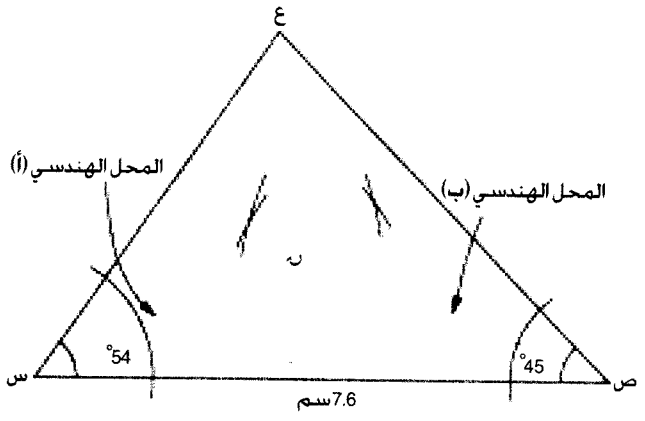
(ب) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن س ص، ص ع.

إذا تقاطع المحالان الهندسيان في نقطة ن.

(جـ) حدد النقطة ن بوضوح على الرسم.

(د) مستخدمًا ن كمركز، ارسم الدائرة التي تمس أضلاع المثلث الثلاثة.

بالنسبة لـ (أ)، (ب) المحال الهندسية هما منصفا ∠ ص س ع، ∠ س ص ع على التوالي ولهذا نحصل على:



ملحوظة

الدائرة التي رسمتها يقال إنها دائرة مرسومة داخل مثلث وتسمى الدائرة الداخلة.

ن تسمى مركز الدائرة الداخلة.

ويبين هذا المثال كيفية رسم الدائرة الداخلة لمثلث.

ارسم المثلث أ ب حـ بحيث أ ب = 9.8 سم ، قياس ∠ ب أ حـ = 76°،
أ حـ = 5.4 سم وعلى نفس الشكل.

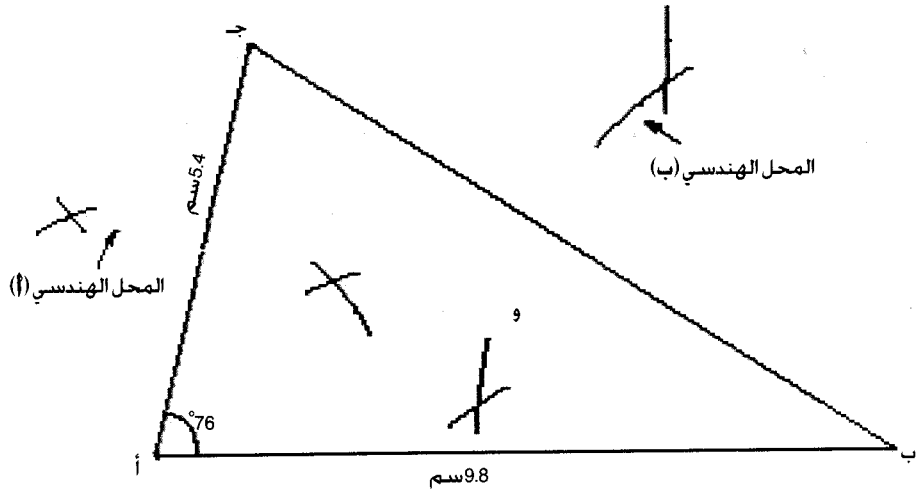
(أ) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافات متساوية من أ، حـ

(ب) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافات متساوية من ب، حـ.
فإذا تقاطع المحلان الهندسيان في نقطة و ،

(جـ) حدد النقطة (و) بوضوح على الرسم.

(د) مستخدمًا النقطة (و)، ارسم دائرة نصف طول قطرها و أ وتمر بالنقط أ، ب، حـ.

بالنسبة لـ (أ)، (ب)، فالمحال الهندسية هي الأعمدة المنصفة لـ $\overline{أحـ}$، $\overline{بحـ}$ على التوالي. ولهذا يكون الرسم كما يلي:



ملحوظة

الدائرة التي رسمتها تمر برؤوس المثلث الثلاثة وتسمى الدائرة الخارجة عن المثلث. تسمى النقطة (و) **مركز الدائرة الخارجة عن المثلث.**
ويوضح هذا المثال كيفية رسم الدائرة الخارجة عن المثلث.

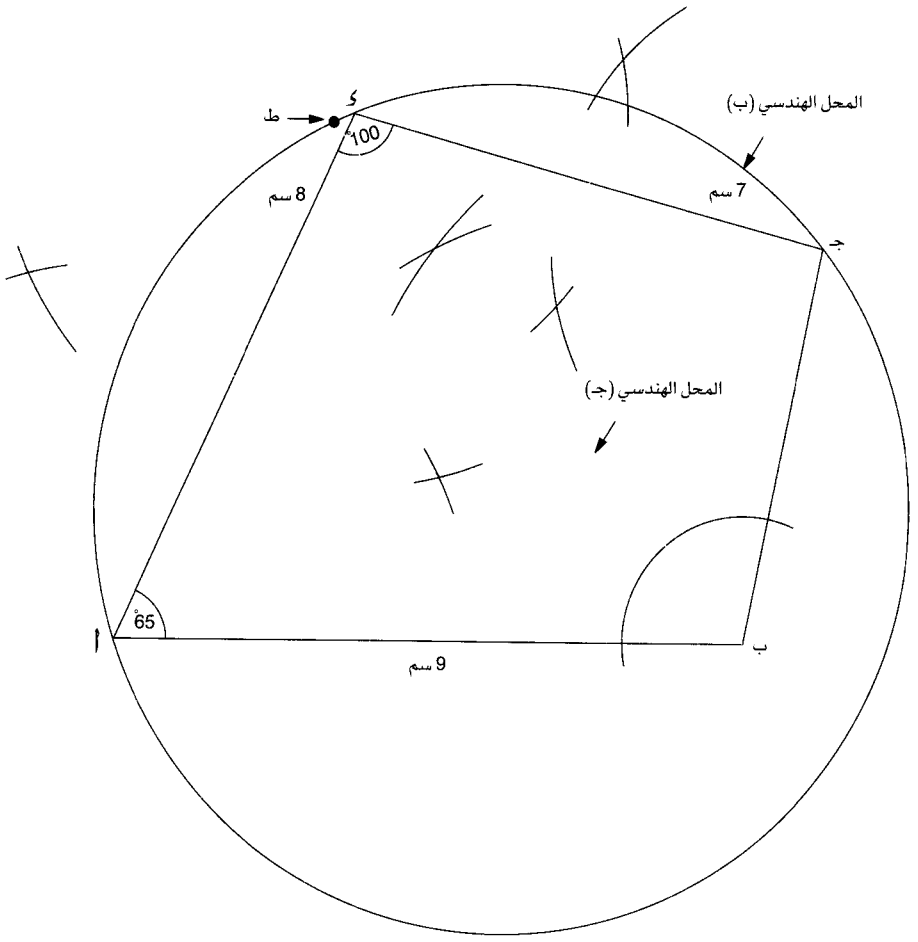
على نفس الشكل،

(أ) ارسم الشكل الرباعي أ ب حـ ء الذي فيه أب = 9 سم، ق ∠ ب أ ء = 65°، أ ء = 8 سم ∠ أ ء حـ = 100°، ء حـ = 7 سم.

(ب) ارسم المحل الهندسي للنقط التي عندها أ حـ يقابل الزاوية 100° المقابلة للزاوية ب.

(جـ) ارسم المحل الهندسي للنقطة د بحيث ق ∠ أ ب د = ق ∠ حـ ب د،

(د) حدد النقطة الخارجة عن الشكل الرباعي ولتكن ط، حيث يتقاطع المحلان الهندسيان.



ملحوظة

1- المحل الهندسي (ب) قوس يمر بالنقط أ، حـ، ء مكونًا الزاوية 100° ولهذا علينا إنشاء الدائرة الخارجة عن Δ أ حـ ء.

2- المحل الهندسي في (حـ) هو منصف ∠ أ ب حـ.

1- ارسم Δ أ ب حـ بحيث أ ب = 8.7 سم، ∠ أ ب حـ = 65°، ب حـ = 4.3 سم. وعلى نفس الرسم

(أ) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن أ، ب.

(ب) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافات متساوية عن ب، حـ.

(جـ) ارسم الدائرة الداخلة للمثلث أ ب حـ.

2- على نفس الشكل،
(أ) ارسم Δ ك ط ر الذي فيه ك ط = 8.9 سم
ق∠ك = 45°، ق∠ط = 67°.
(ب) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافات متساوية عن ك ر، ك ط.
(جـ) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن ط ك، ط ر.
(د) ارسم الدائرة الداخلة للمثلث ك ط ر.

3- على نفس الرسم،
(أ) ارسم المثلث س ص ع الذي فيه س ص = 9 سم، ص ع = 8 سم، ع س = 7 سم.
(ب) حدد بوضوح النقطة س~ التي تحصل عليها بالرسم والتي تبعد بمسافات متساوية عن س، ص، ع. قس واكتب طول س~ س.

4- على نفس الشكل
(أ) ارسم المثلث ل م ن الذي فيه ل م = 10 سم، م ن = 8 سم، ل ن = 6 سم.
(ب) حدد بوضوح النقطة(و) التي تبعد بمسافات متساوية عن كل من ل م، م ن، ل ن. قس واكتب المسافة من(و) إلى ل ن.

5- ارسم على نفس الشكل
(أ) المثلث س ص ع الذي قاعدته س ص = 9 سم، س ع = 10.5 سم، ص ع = 8.5 سم.
(ب) النقطة ك بحيث ∠س ص ك = 90°، ك تبعد بمسافات متساوية عن س ص، س ع. قس ك ص ثم حدد هذا الطول لأقرب ملليمتر.

6- ارسم في نفس الشكل
(أ) المثلث ك ح ف الذي فيه ح ف = 10 سم، ق∠ك ح ف = 38°، ق∠ك ف ح = 95°.
(ب) حدد المحل الهندسي للنقط التي تبعد 4.5 سم من ف.
(جـ) المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن ك ح، ح ف.
على نفس رسمك عنون النقط ك، ط، كلاهما على بعد 4.5 سم من ف، وعلى مسافات متساوية من ك ح، ح ف. قس واكتب طول ك ط.

7- ملعب على شكل رباعي ا ب حـ ك. فإذا كان ا ب = 90 م، ا ك = 70 م، ق∠ب ا ك = 115°، ق∠ا ب حـ = 100°، ق∠ا ك حـ = 85°.
(أ) مستخدمًا مقياس رسم 1 سم ليمثل 10 أمتار ارسم الملعب بمقياس رسم دقيق.

(ب) ارسم على نفس الشكل.
(i) المحل الهندسي الذي يمثل النقط التي تبعد 80 م من ب،
(ii) المحل الهندسي الذي يمثل النقط التي تبعد مسافات متساوية عن حـ، ك
عنون نقطة تقاطع المحلين الهندسيين بالحرف م.
(جـ) النقطة(ن) في الملعب تبعد بمسافات متساوية من ب حـ، حـ ك بحيث ق∠ا ن ب = 90°.
مثل هذه النقطة (ن) على الرسم باستخدام تقاطع المحليين مرة ثانية.
(د) قس واكتب طول م ن.

8- ارسم المثلث س ص ع الذي فيه س ص = 11.2 سم، ∠س ص ع = 106° ص ع = 8.4 سم.
(أ) قس واكتب فيما يلي طول س ع.
على نفس الرسم،
(ب) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن س ص، ص ع.
(جـ) ارسم المحل الهندسي للنقط التي على بعد 3 سم من المستقيم ص ع وعلى نفس جانب ص ع مثل س.
(د) ارسم الدائرة التي نصف قطرها = 3 سم والتي تمس المستقيمين س ص، ص ع، عنوان مركز الدائرة بالحرف و.

9- حقل فلاح أ حـ ك والذي يقع في أرض أفقية يحده من جانبيه طريقان يتقاطعان على التعامد في نقطة أ. فإذا كانت النقطة ب تقع على أحد الطريقين، النقطة ك تقع على الطريق الآخر، وبطول الضلعين الجانبين الآخرين ب حـ، حـ ك توجد أسوار.
(أ) إذا كان ص = 120 م، ا ك = 80 م، ق∠ا ك حـ = 110°، ق∠ا ب حـ = 56°، استخدم مقياس رسم 1 سم لتمثل 10 م ثم ارسم رسمًا بمقياس دقيق لذلك الحقل.

(ب) شجرة في الحقل تبعد 60م عن (أ) و على مسافات متساوية من الأسوار ب حـ، حـ ء.
ارسم على نفس الرسم،
(i) المحل الهندسي الذي يمثل النقط التي تبعد 60م من أ.
(ii) المحل الهندسي الذي يمثل النقط التي تبعد مسافات متساوية عن ب حـ، حـ ء.
عنون بالحرف ت النقطة التي تمثل موقع الشجرة.

(جـ) يقع بئر ماء في الحقل وعلى بعد 10م من الطريق أ ب وأيضًا على أبعاد متساوية من النقط حـ، ء. عبر عن موقع البئر على الرسم باستخدام تقاطع المحلين الهندسيين.
عنونه بوضوح بالحرف س.

(د) عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس 15° وصل ظل الشجرة تمامًا إلى الركن ب. برسم شكل آخر أو بأي طريقة أخرى، أوجد مقربًا لأقرب متر ارتفاع الشجرة.

1- ارسم المثلث أ ب حـ الذي فيه أ ب = 11.6سم
ق∠ب أ حـ = 104°، أ حـ = 7.6سم.
(أ) قس واكتب طول ب حـ.
(ب) على نفس الرسم،
(i) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن أ، حـ.
(ii) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن ب، حـ.
(iii) ارسم الدائرة التي تمر بالنقط أ، ب، حـ.
(جـ) قس واكتب نصف قطر هذه الدائرة.
(د) إذا كانت س نقطة تقع على نفس الجانب من ب حـ مثل أ بحيث أن المثلث س ب حـ متساوى الساقين فيه ب س = حـ س،
ق∠ب س حـ = 104°. حدد النقطة س بوضوح على الرسم.

1- (أ) ارسم Δ أ ب حـ الذي فيه أ ب = 6سم،
ق∠ب أ حـ = 110°، ب حـ = 9سم.
(ب) وضح على نفس الرسم المستقيمات المرسومة، ثم ارسم موقع النقطة س التي تبعد بمسافات متساوية عن أ، ب، حـ.
(جـ) قس واكتب طول أ س.
(د) ارسم على نفس الرسم المحل الهندسي للنقط التي تقع في نفس الجانب الذي تقع فيه النقطة أ من ب حـ والتي يكون عندها الزاوية المقابلة للضلع ب حـ = 110°. عنون هذا المحل الهندسي بوضوح.

12-(أ) مستخدمًا المسطرة والفرجار، ارسم Δ س ص ع الذي فيه س ص = 10سم، ص ع = 9سم، ع س = 8سم.
(ب) قس واكتب قياس أكبر زاوية في المثلث.
(جـ) ارسم على نفس الرسم
(i) المحل الهندسي للنقط التي تبعد 3.8سم عن س.
(ii) المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن ص، ع.
(د) أوجد المسافة بين النقطتين اللتين تبعدان 3.8سم عن س وعلى أبعاد متساوية من ص، ع.
قرب إجابتك لأقرب رقم عشري بالسنتيمتر.

13- جميع عناصر هذا السؤال يجاب عنها في ورقة رسم بياني واحدة.
حقل على شكل رباعي أ ب حـ ء بحيث أن أ ب = 90م، ∠أ ب حـ = 70°، ب حـ = 33م، أ ء = 70م والقطر ب ء = 85م.
(أ) (i) مستخدمًا مقياس رسم 1سم ليمثل 10 أمتار، ارسم هذا الحقل بمقياس رسم دقيق.
(ii) قس واكتب قياس الزاوية ∠ ب حـ ء.
(ب) في مسابقة للأطفال أخفيت الجائزة في نقطة في الحقل تبعد 15م عن الضلع حـ ء وتبعد بمسافات متساوية عن الضلعين أ ب، أ ء. ارسم على نفس رسمك المحل الهندسي الذي يمثل
(i) جميع النقط الموجودة في الحقل والتي تبعد 15م عن حـ ء.
(ii) جميع النقط في الحقل التي تبعد مسافات متساوية عن أب، أ ء.
(جـ) عنون بالحرف س النقطة التي تمثل الموقع الذي تختفي فيه الجائزة.

14- الشكل المرسوم لحقل مثلث الشكل أ ب حـ. رسم بمقياس رسم 1سم لكل 100 متر. فإذا كانت شجرة (ت) في الحقل على بعد 250م من أ وعلى أبعاد متساوية من ب أ، ب حـ.

(أ) بعمل رسم مناسب، وضح موقع الشجرة ت.

(ب) استخدم الرسم في إيجاد.

(i) المسافة بالمتر من ت إلى ب.

(ii) موقع ت من ب.

الشمال

جـ

ب

15- ركنان أ، ب من حقل أفقي مثلث الشكل يبعدان 240م عن بعضهما البعض الرسم التالي جزء من الرسم بالمقياس الذي رسم به الحقل.

(أ) أوجد مقياس الرسم على صورة 1 : ن

(ب) حدد اتجاه أ من ب.

فإذا كان الركن الثالث حـ للحقل يقع في الجنوب من أب. وعلى بعد 220م من أ، 170م من ب.

(جـ) مستخدمًا المسطرة والفرجار فقط، أوجد وعنون موقع حـ على الرسم المرسوم بالمقياس.

(د) شجرة ت في الحقل تبعد بمسافات متساوية من الأركان الثلاثة أ، ب، حـ.

(i) عارضًا رسمك بوضوح، أوجد وعنون موقع الشجرة.

(ii) أوجد المسافة بين الشجرة وأركان الحقل.

الشمال

ب

16- الشكل المرسوم على اليسار ليس دقيقًا وفيه:

ر ر جزء من المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافات متساوية عن أ، ب

ذ ذ' جزء من المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافات متساوية عن أب، ب حـ ، والنقطة م تقع على كل من المحلين الهندسيين فإذا كان أب = 20سم، ∠ أ ب حـ = 120°. احسب ب م. مظهرًا عملك بوضوح.

17- يبين الشكل المرسوم بمقياس رسم 1سم لكل 1كم مدينتين أ، ب على بعد 10كم من بعضهما.

(أ) مدينة أخرى حـ عرف عنها ما يلي:

I تبعد بمسافات متساوية عن أ، ب

II تبعد مسافة لا تزيد عن 6.5 كم عن أ

(i) استخدم I، II لرسم المحل الهندسي للمواقع الممكنة للمدينة حـ.

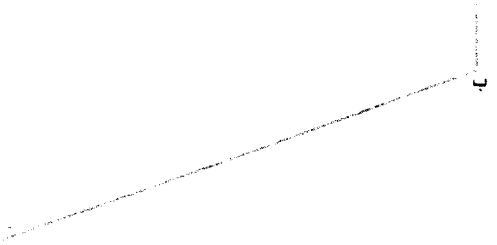
(ii) أوجد موقعين متطرفين لهذا المحل الهندسي ثم عنونهما بالحروف $حـ_1$، $حـ_2$.

(ب) طريق مستقيم س ب ص يمر خلال المدينة ب. وعلى هذا الطريق المدينة ب هي أقرب نقطة إلى المدينة أ.

(i) ارسم وعنون الطريق س ب ص.

(ii) قس واكتب اتجاهي س ، ص من ب.

الشمال



10-2 محال هندسية تتضمن مساحات

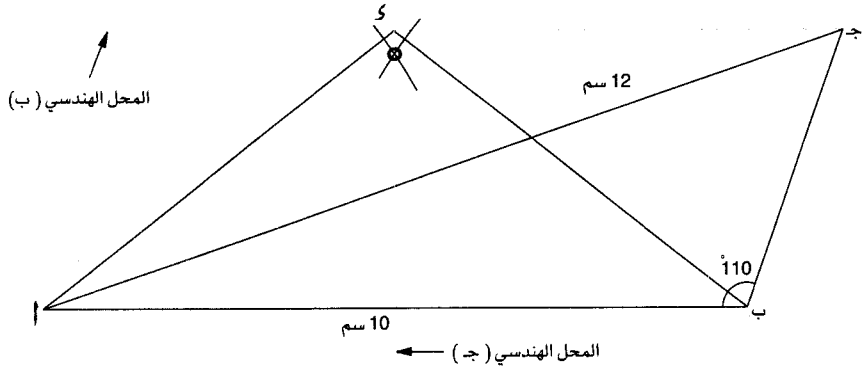
Loci Involving Areas

(أ) ارسم Δ ا ب حـ الذي قاعدته ا ب = 10سم، ق ∠ ا ب حـ = 110°، ا حـ = 12سم.

(ب) ارسم المحل الهندسي للنقطة س على نفس الجانب من ا ب مثل حـ. بحيث تكون مساحة Δ س ا ب = مساحة Δ ا ب حـ.

(جـ) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن ا ، ب.

(د) حدد وعنون بوضوح النقطة (ك) بحيث ك ا = ك ب ، مساحة Δ ك ا ب = مساحة Δ ا ب حـ.



ملحوظة

لرسم المستقيم المار بالنقطة حـ موازيًا ا ب - حرك المثلث قائم الزاوية على امتداد مسطرة.

ملحوظة

1- بما أن Δ س ا ب ، Δ ا ب حـ مشتركان في القاعدة ا ب. فإن ارتفاعهما يجب أن يتساويا لتكون لهما نفس المساحة. وعليه فإن المحل الهندسي للنقطة س هو المستقيم المار بالنقطة حـ موازيًا ا ب.

2- المحل الهندسي للنقطة (حـ) هو العمود المنصف لـ ا ب.

1- (أ) ارسم المثلث أ ب حـ الذي قاعدته أ ب = 8 سم، ق∠أ ب حـ = 100° ، أحـ = 12سم.

(ب) ارسم المحل الهندسي للنقطة س التي تقع على نفس الجانب من أ ب مثل جـ بحيث أن مساحة Δ س أ ب = مساحة Δ أ ب حـ.

(جـ) ارسم المحل الهندسي للنقطة ص التي تقع على نفس الجانب من أ ب مثل س بحيث أن مساحة Δ ص أ ب = $\frac{1}{2}$ مساحة Δ أ ب حـ

2- (أ) ارسم المثلث ء ح ف الذي فيه ء ح = 10سم ، ح ف = 8سم، ء ف = 6سم.

(ب) على الرسم :

(i) ارسم المحل الهندسي للنقطة د داخل Δ ء ح ف بحيث أن مساحة Δ د ح ف =12سم^2

(ii) ارسم المحل الهندسي للنقطة ط داخل Δ ء ح ف بحيث تكون على مسافات متساوية من ء ح، ء ف.

(iii) حدد بوضوح مكان النقطة ر داخل Δ ء ح ف بحيث أن مساحة Δ ر ح ف = 12سم^2، وعلى مسافات متساوية من ء ح، ء ف.

3- (أ) ارسم Δ ق هـ ط الذي فيه ق هـ = 7سم ، ق∠هـ ق ط = 50° ، ق∠ق هـ ط = 60°.

(ب) على الرسم :

(i) ارسم المثلث هـ ط ى بحيث ى نقطة على امتداد ق هـ. مساحة Δ هـ ط ى = $\frac{1}{2}$ مساحة Δ ق هـ ط.

(ii) ارسم المحل الهندسي للنقطة ك خارج Δ ق هـ ط بحيث أن مساحة Δ هـ ط ك = $\frac{1}{2}$ مساحة Δ ق هـ ط

(iii) ارسم المحل الهندسي للنقطة ل بحيث تكون على مسافات متساوية من النقطة هـ، ط

(iv) حدد النقطة م خارج Δ ق هـ ط بحيث أن مساحة Δهـ ط م المتساوي الساقين تساوي $\frac{1}{2}$ مساحة Δ ق هـ ط.

4- (أ) ارسم Δ أ ب حـ الذي قاعدته ب حـ = 10سم، ق∠ب حـ أ = 110°، أحـ = 5 سم، قس واكتب طول أ ب.

(ب) ارسم العمود المنصف لـ ب حـ.

(جـ) ارسم المحل الهندسي للنقطة س التي تقع على نفس الجانب من الضلع ب حـ مثل أ بحيث أن مساحة Δ س ب حـ = مساحة Δ أ ب حـ.

(د) بعد ذلك حدد وعنون بوضوح النقطة ء والتي تكون بحيث ء ب = ء حـ ، مساحة Δ ء ب حـ = مساحة Δ أ ب حـ.

5- (أ) ارسم الشكل الرباعي أ ب حـ ء الذي فيه أ ب = 9سم، ق∠ب أ ء = 65°، أء = 8سم ، ق∠أ ء حـ = 110° ، ء حـ = 4سم.

(ب) على الرسم:

(i) ارسم المحل الهندسي للنقطة س بحيث يكون ء س = 3سم.

(ii) ارسم المحل الهندسي للنقطة ص بحيث ق∠أ ص ء = 90°.

(iii) حدد بوضوح بالحرف ر النقطة خارج الشكل الرباعي التي تبعد 3سم عن ء بحيث ق∠أ ر ء = 90°.

(جـ) قس واكتب طول $\overline{أر}$.

(د) أوجد من رسمك، وحدد بوضوح بالحرف ط نقطة على امتداد أ ب بحيث أن:

مساحة Δ ب ء حـ = مساحة Δ ب ء ط.

(هـ) قس واكتب طول ب ط.

6- ارسم المثلث س ص ع الذي فيه س ص = 5 سم ،

∠ س = 60° ، ∠ ص = 90° .

قس واكتب طول ص ع على نفس الرسم.

(أ) ارسم الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع

(ب) ارسم في نفس اتجاه س ص مثل النقطة ع

المحل الهندسي للنقطة ء بحيث مساحة

Δ س ص ء = $\frac{1}{2}$ مساحة Δ س ص ع

(جـ) حدد وعنون بوضوح النقطة ط بحيث ∠ س ط ص

= 30° ومساحة Δ س ص ء = $\frac{1}{2}$ مساحة

Δ س ص ع .

إذا كانت م نقطة حيث ق∠ س م ص = 30°. أوجد

أكبر قيمة ممكنة لمساحة Δ س م ص.

7- ارسم المثلث أ ب حـ الذي فيه أب = 10سم ،

ب حـ = 9سم، حـ أ = 7سم.

ارسم المحل الهندسي للنقط بحيث تكون على

مسافات متساوية من أ ، حـ.

ارسم المحل الهندسي للنقطة ء داخل المثلث أ ب حـ

بحيث مساحة المثلث أب ء = $12\frac{1}{2}$سم^2.

ط نقطة داخل المثلث أب حـ بحيث أ ط = حـ ط،

ومساحة Δ أ ب ط = $12\frac{1}{2}$سم^2.

حدد موقع النقطة ط وقس واكتب طول حـ ط.

8- جميع أجزاء هذا السؤال يجاب عنها في ورقة رسم بياني واحدة.

(أ) ارسم المثلث أ ب حـ الذي فيه القاعدة

أ ب = 12سم، ق∠ أ ب حـ = 50°، ب حـ = 7سم،

قس واكتب قياس زاوية أ حـ ب.

(ب) ارسم على رسمك المحل الهندسي للنقط داخل

المثلث بحيث تكون:

(i) على بعد 9 سم من أ.

(ii) على بعد 5.5سم من ب

(iii) 2.5 سم من أب.

(جـ) حدد وعنون على رسمك المواقع الممكنة للنقطة

ء داخل المثلث أ ب حـ، بحيث

أ ء ≥ 9سم ، ب ء ≥ 5.5سم

مساحة Δ ء أ ب = 15سم^2.

(ء) النقطة ط حيث

أ ط ≥ 9سم،

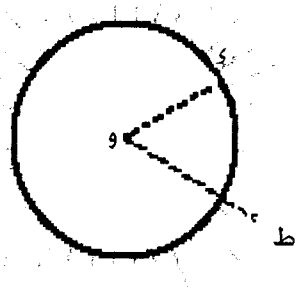
ب ط ≥ 5.5سم

مساحة Δ ط أب ≤ 15سم^2.

ظلل على رسمك المنطقة التي يجب أن تقع فيها النقطة ط.

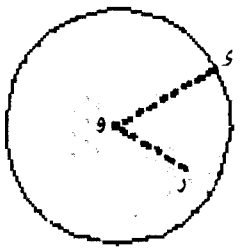
11-2 المحال الهندسية والمتباينات Loci and Inequalities

سوف نناقش في هذا الجزء بعض المتباينات القياسية التى تتضمن المحال الهندسية



و ط ≤ و ك

شكل (1)



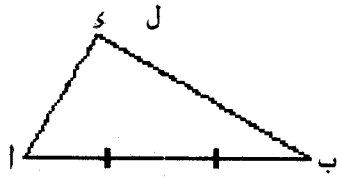
و ر ≥ و ك

شكل (2)

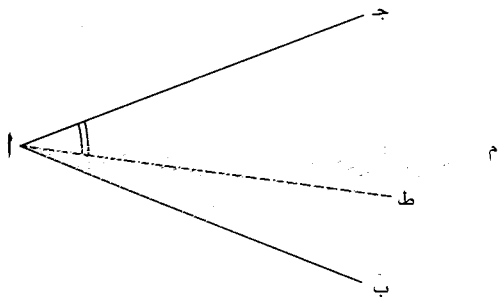
المحل الهندسي لنقطة (ك) على مسافة ثابتة من نقطة محددة (و) هو دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها (ك و). أي نقطة ط خارج الدائرة سوف تكون على مسافة أكبر من (ك و) من و. ولهذا تمثل المنطقة المظللة في الشكل (1) المتباينة و ط ≤ و ك.

ومن ناحية أخرى، أي نقطة (ر) تقع داخل الدائرة سوف تكون على مسافة أقل من (و ك) من (و). ولهذا فإن المنطقة المظللة في شكل (2) تمثل المتباينة و ر ≥ و ك.

المحل الهندسي للنقط التي على أبعاد متساوية من نقطتين معلومتين أ ، ب هو العمود المنصف ل. أي نقطة ك تقع على يسار ل، تكون أقرب إلى أ من ب. ولهذا، فإن المنطقة المظللة تمثل المتباينة أ ك ≤ ب ك.



لندرس بعد ذلك المحل الهندسي الذي هو منصف الزاوية والمعنون بالحرف م. وعليه فإن أي نقطة ط تقع في المنطقة المظللة سوف تعطي ق ∠ ب أ ط ≥ ق ∠ جـ أ ط.



بالنسبة للمتباينات المتضمنة محال هندسية، تظلل عادة المنطقة **المطلوبة**.

ارسم على شكل واحد.

(أ) Δ أ ب حـ الذي فيه أ ب = 6سم، ب حـ = 7سم، حـ أ = 8 سم.

(ب) المحل الهندسي للنقطة د التي تبعد بمسافات متساوية عن أ ، ب.

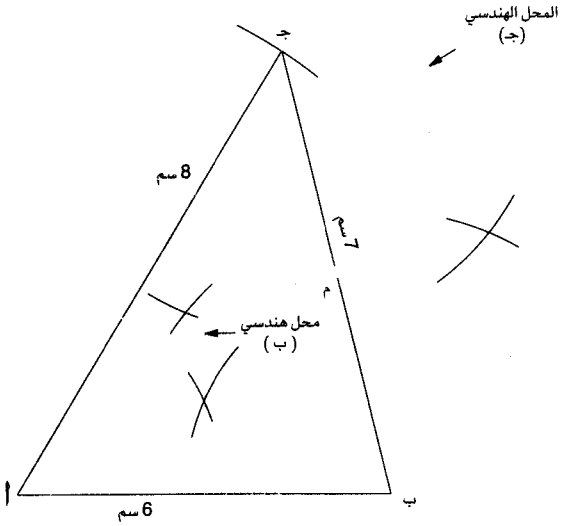
(جـ) المحل الهندسي للنقطة ط التي تبعد بمسافة ثابتة 3.5سم عن ك، حيث ك منتصف $\overline{ب حـ}$.

موقع النقطة ر التي تقع داخل المثلث بحيث:

أ ر ≤ ب ر ، ك ر ≤ 3.5سم.

حدد بوضوح عن طريق التظليل المنطقة التي يجب أن تقع فيها ر.

المحل الهندسي بالنسبة (ب) هو العمود المنصف لـ $\overline{أ ب}$. المحل الهندسي لـ (حـ) هو الدائرة الذي فيها $\overline{ب حـ}$ قطر.



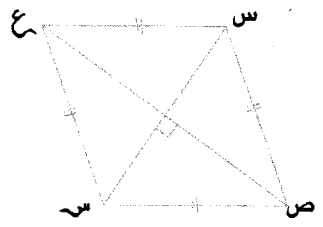
بما أن أ ر ≤ ب ر، فإن النقطة ر تكون أقرب إلى ب، بمعنى أنها تقع على يمين العمود المنصف لـ (أب) في هذه الحالة. بما أن ك ر ≤ 3.5سم فإن النقطة ر تقع خارج الدائرة. وعليه فإن المنطقة المطلوبة ظُللت كما هو موضح.

1- النقطة د التي تقع داخل المعين أ ب حـ ء بحيث أن

أ د ≥ د ج ، ب د ≤ د ء .

انقل الشكل ثم حدد بوضوح عن طريق التظليل المنطقة التي يجب أن تقع فيها النقطة د.

2- النقطة ط داخل معين سـ س ص ع بحيث أن
ق∠سـ س ط ≤ ق∠ ص س ط ، ق∠سـ ط س ≤ 90° ،
انقل الرسم وحدد بوضوح عن طريق التظليل المنطقة التي تقع فيها النقطة ط.



3- ارسم على نفس الرسم

(أ) المثلث أ ب حـ الذي فيه أ ب = 10سم ،
ق∠أ ب حـ = 110° ، أ حـ = 12سم.

(ب) المحل الهندسي للنقط التي تكون على مسافات متساوية من أ ، ب

(جـ) المحل الهندسي للنقط التي تكون على مسافات متساوية من $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب حـ}$

موقع النقطة سـ التي تقع داخل المثلث بحيث أن
أ سـ ≤ ب سـ، ق∠أ حـ سـ ≥ ق∠ب حـ سـ. حدد بوضوح عن طريق التظليل المنطقة التي يجب أن تقع فيها سـ.

4- ارسم على شكل واحد

(أ) الشكل الرباعي أ ب حـ ء الذي فيه:
أ ب = 8سم، ق∠ب = 100° ، ب حـ = 7سم ،
حـ ء = 9سم، أ ء = 6سم.

(ب) المحل الهندسي للنقط التي تقع على مسافات متساوية من ب ، حـ .

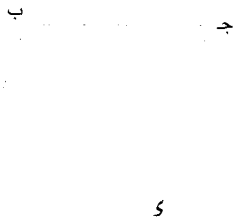
(جـ) المحل الهندسي للنقط التي تقع على مسافات متساوية من $\overline{أ ء}$ ، $\overline{حـ ء}$.

(د) المحل الهندسي للنقطة د التي تقع داخل الشكل الرباعي أ ب حـ ء بحيث تكون على مسافة ثابتة 4 سم من ك التي تنصف $\overline{أ ب}$.

ظلل داخل الشكل الرباعي أ ب حـ ء ، وعنون المنطقة التي تقع فيها النقطة سـ ، إذا كان
ك سـ ≤ 4سم، ب سـ ≥ حـ سـ، ق∠حـ ء سـ ≥ ق∠أ ء سـ.

5- النقطة د داخل المعين أ ب حـ د بحيث
أ د ≤ د حـ، أ د ≥ أ ب.

مستخدمًا المعين. ارسم وحدد بوضوح عن طريق التظليل المنطقة التي يجب أن تقع فيها د.



6- (أ) ارسم المثلث أ ب حـ الذي فيه أ ب = 9 سم، ب حـ = 7 سم وقياس زاوية أ ب حـ = 38° أوجد طول $\overline{أ حـ}$.

(ب) أوجد وعنون بوضوح بالحرف ء النقطتين اللتين تبعدان 6 سم عن ب وبمسافات متساوية من $\overline{أ حـ}$، $\overline{أ ب}$.

(جـ) النقطة ط التي تقع داخل المثلث أ ب حـ بحيث أن بعدها عن ب أقل من 6 سم وتكون أقرب إلى $\overline{أ حـ}$ من $\overline{أ ب}$. بيّن بوضوح عن طريق التظليل المنطقة التي تقع فيها ط.

7- (أ) ارسم بوضوح المثلث أ ب حـ الذي قاعدته $\overline{أ ب}$ = 12سم، ق∠حـ أ ب = 40° ، أ حـ = 10 سم.
قس طول ب حـ.

(ب) على نفس الرسم

(i) ارسم المحل الهندسي للنقط داخل المثلث أ ب حـ بحيث تكون على بعد 3سم من $\overline{أ حـ}$

(ii) أنشئ المحل الهندسي للنقط على مسافات متساوية من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$.

(جـ) نقطة د تقع داخل المثلث أ ب حـ بحيث د تقع أكثر من 3 سم من $\overline{أ حـ}$ ولكن بعدها عن $\overline{ب حـ}$ أقل من بعدها عن $\overline{أ ب}$. حدد بوضوح عن طريق التظليل المنطقة التي يجب أن تقع فيها ء.

8- (أ) ارسم في شكل وحيد

(i) Δ أ ب حـ الذي فيه أ ب = 10سم ،
ب حـ = 9 سم ، حـ أ = 8 سم.

(ii) المحل الهندسي للنقط التي تكون على مسافات متساوية من ب ، حـ

(iii) المحل الهندسي للنقط التي تكون على مسافات متساوية من أ ، ب.

(ب) حدد بوضوح على الرسم النقطة س التي تقع على مسافات متساوية من أ ، ب ، حـ. قس واكتب طول $\overline{\text{س أ}}$.

(جـ) النقطة ء تقع داخل المثلث أ ب حـ بحيث أن:

ء أ ≤ ء ب ≤ ء حـ.

حدد بوضوح عن طريق التظليل المنطقة التي تقع فيها ء.

9- (أ) ارسم المثلث أ ب حـ بحجمه الكامل بحيث تكون القاعدة ب حـ = 10.0سم،

حـ أ = 7.0سم، أ ب = 8.0سم.

(ب) ارسم المحل الهندسي للنقط ء بحيث أن

ب ء = ء حـ. حدد بالحرف ء النقطة التي يتقابل عندها المحل الهندسي مع $\overline{\text{ب حـ}}$.

(جـ) ارسم المحل الهندسي للنقط ط بحيث

ق∠ب حـ ط = ق∠ط حـ أ حدد بالحرف ط النقطة التي يتقابل عندها المحل الهندسي مع $\overline{\text{أ ب}}$.

(د) قس طول $\overline{\text{ب ط}}$.

(هـ) ارسم المحل الهندسي للنقطة ص بحيث أ ص = 4.0سم، حدد بالحرف ص النقطة التي يتقابل عندها المحل الهندسي مع $\overline{\text{أ حـ}}$.

(و) ظلل وعنون ذ المنطقة التي تقع فيها النقطة ذ إذا كان:

ب ذ ≤ ذ حـ، ق∠أ حـ ذ ≥ ق∠ب حـ ذ، أ ذ ≥ 4سم.

10- (أ) مستخدمًا المسطرة والفرجار ارسم المثلث أ ب حـ الذي فيه أ ب = 12سم، أ حـ = 8.5سم، ب حـ = 14سم.

(ب) قس وحدد قياس أصغر زاوية في المثلث.

(جـ) ارسم وعنون على رسمك:

(i) المحل الهندسي للنقط التي تكون على مسافات متساوية من أ ، حـ

(ii) المحل الهندسي للنقط التي تقع على مسافات متساوية من $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$.

(د) ارسم الدائرة التي تمس $\overline{\text{أ حـ}}$ من منتصفه، أيضًا تمس الخط أ ب.

(هـ) النقطة ء داخل المثلث أ ب حـ هي أقرب إلى حـ منها إلى أ وأقرب إلى $\overline{\text{أ حـ}}$ منها إلى $\overline{\text{أ ب}}$.

حدد بوضوح عن طريق تظليل المنطقة التي يجب أن تقع فيها ء على الرسم.

11- يبين الشكل المرسوم دائرتين متحدتي المركز حـ طولا نصفي قطريهما 1سم، 2سم. أ ، ب نقطتان على الدائرة الكبرى. ارسم على الشكل المحل الهندسي للنقط التي تبعد بمسافات متساوية عن أ ، ب.

ظلل المنطقة التي يجب أن تقع فيها النقطة س إذا كان أ س ≥ ب س ، 1 سم ≤ حـ س ≤ 2 سم.

أ •

ب • جـ •

12- جميع عناصر هذا السؤال يجاب عنها في ورقة رسم بياني واحدة.

(أ) ارسم الشكل الرباعي أ ب حـ ء الذي فيه القاعدة أ ب = 10سم، ق∠ب أ ء = 82°، أ ء = 7.2سم،

ق∠أ ب حـ = 105°، ق∠أ ء حـ = 75°

قس طول $\overline{\text{أ حـ}}$.

(ب) ارسم على الشكل المحل الهندسي لجميع النقط داخل الشكل الرباعي التي تقع على مسافات متساوية من:

(i) أ ، ب (ii) أ ، ء

(جـ) حدد النقطة ح التي يتقابل عندها الخطان. قس طول $\overline{\text{أ ح}}$.

(د) ارسم على الشكل المحل الهندسي لجميع النقط التي تبعد عن ح بمسافة تساوي أ ح.

(هـ) تقع النقطة د داخل الشكل الرباعي بحيث أن:

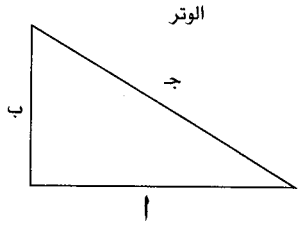
د أقرب إلى ب من أ

د أقرب إلى ء من أ

ظلل على الرسم المنطقة التي يجب أن تقع فيها النقطة د.

12-2 مسائل في حساب المثلثات تتضمن ثلاثة أبعاد
Trigonometric Problems Involving Three Dimensions

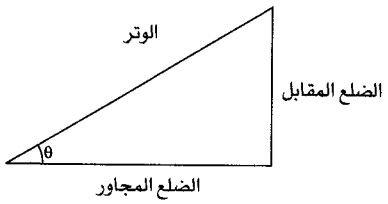
وُضعت نظرية فيثاغورث، والتعريفات والقواعد المختلفة في حساب المثلثات (الصيغ الرياضية) التي تعلمتها في القائمة التالية بما أنها مطلوبة لحل مسائل حساب المثلثات التي تتضمن ثلاثة أبعاد.



1- نظرية فيثاغورث في أي مثلث قائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين بمعنى:

$$حـ^2 = أ^2 + ب^2$$

2- تعريف الظل ، الجيب، جيب التمام كما يلي:

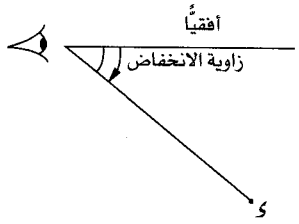


$$\text{ظا } \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$

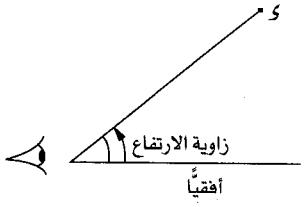
$$\text{جا } \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\text{جتا } \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

3-



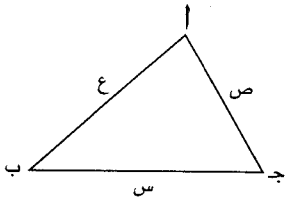
تستخدم عند النظر لأسفل إلى النقطة (ى)



تستخدم عند النظر لأعلى إلى النقطة (ى)

تقاس دائمًا زوايا الارتفاع أو الانخفاض من المستوى الأفقي.

4- قاعدة الجيب



$$\frac{س}{\text{جا } أ} = \frac{ص}{\text{جا } ب} = \frac{ع}{\text{جا } حـ} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\text{جا } أ}{س} = \frac{\text{جا } ب}{ص} = \frac{\text{جا } حـ}{ع}$$

وتستخدم قاعدة الجيب لحل المثلث عندما نعطى:

(أ) قياسا زاويتين وطول ضلع.

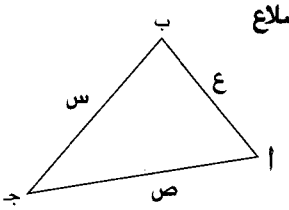
أو (ب) طولا ضلعين وقياس زاوية غير محصورة بينهما.

5- قاعدة جيب التمام

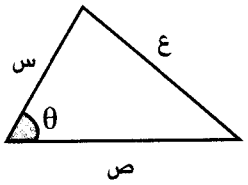
$$\left.\begin{array}{l} س^2 = ص^2 + ع^2 - 2صع \text{ جتا } ا \\ ص^2 = س^2 + ع^2 - 2سع \text{ جتا } ب \\ ع^2 = س^2 + ص^2 - 2سص \text{ جتا } حـ \end{array}\right\} \text{ أو } \left\{\begin{array}{l} \text{جتا } ا = \dfrac{ص^2 + ع^2 - س^2}{2صع} \\ \text{جتا } ب = \dfrac{س^2 + ع^2 - ص^2}{2سع} \\ \text{جتا } حـ = \dfrac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2سص} \end{array}\right.$$

تستخدم قاعدة جيب التمام في حل المثلث عندماتعطى

(أ) أطوال ثلاثة أضلاع

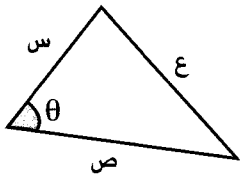


أو (ب)طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما.



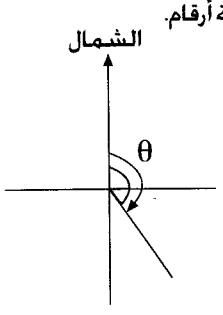
6- إذا أعطيت طولي ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما فإن

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \text{ س ص جا } \theta$$



7- الاتجاه

- **عند البحث عن الاتجاه، نقيس دائمًا في اتجاه عقارب الساعة من ناحية الشمال.**
- **يعبر دائمًا عن الاتجاه بثلاثة أرقام.**



الشمال

أ، ب، حـ ثلاث نقط على سطح أفقي. أ ب = 20 م، أ حـ = 30 م، ق∠ أ ب حـ = 90°، وكان موقع ب من أ هو 304°.

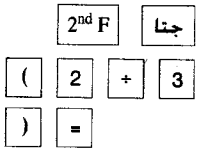
(أ) احسب موقع حـ من أ.

(ب) احسب المسافة ب حـ.

(جـ) أوجد مساحة المثلث أ ب حـ.

ملحوظة

اضغط على مفاتيح (من اليسار)



بالنسبة للزاوية، تعامل مع رقمين عشريين ثم قرّبهما إلى أقرب رقم عشري.

(أ) $\text{جتا} \angle \text{ب أ حـ} = \frac{20}{30}$

$= \frac{2}{3}$

$\text{ق} \angle \text{ب أ حـ} = 48.19^\circ$

$= 48.2^\circ$ (لأقرب رقم عشري واحد)

∴ اتجاه حـ من أ $= 56^\circ + 48.2^\circ$

$= 104.2^\circ$

(ب) طبق نظرية فيثاغورث

$\text{أ ب}^2 + \text{ب حـ}^2 = \text{أ حـ}^2$

$20^2 + \text{ب حـ}^2 = 30^2$

$400 + \text{ب حـ}^2 = 900$

$\text{ب حـ}^2 = 900 - 400 = 500$

$\text{ب حـ} = \sqrt{500}$

$= 22.36$

$= 22.4$ م (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

بالنسبة للطول، تعامل مع أربعة أرقام معنوية، ثم قربها إلى ثلاثة أرقام معنوية.

(جـ) مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{1}{2} \text{أ ب} \times \text{ب حـ}$

$= \frac{1}{2} \times 20 \times 22.36$

$= 223.6$

$= 224 \text{ م}^2$ (لأقرب 3 أرقام معنوية)

استخدم القيمة الأكثر دقة 22.36 مع ب حـ.

طريقة بديلة

مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{1}{2} \times \text{أ ب} \times \text{أ حـ} \times \text{جا} \angle \text{ب أ حـ}$

$= \frac{1}{2} \times 20 \times 30 \times \text{جا} 48.19^\circ$

$= 223.6$

$= 224 \text{ م}^2$ (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

استخدم القيمة الأكثر دقة 48.19° مع ∠ ب أ حـ.

ك، ح، ف ثلاث نقط في مستوى أفقي الشمال
ق∠ك = 45°، ق∠ح = 67°، ح ف = 2.3 كم، ف تقع جنوب ك، احسب
(أ) طول $\overline{ك ف}$
(ب) مساحة Δ ك ح ف.

ك
45°
ح
67°
2.3 كم
ف

ملحوظة

قاعدة جيب الزاوية للمثلث د ح ف

د
ص
ع
ح
س
ف

$$\frac{ص}{جا(ف)} = \frac{س}{جا(د)}$$

اضغط على المفاتيح:

2.3	جا	67	÷
جا	45	=	

صيغة مساحة Δ د ح ف

د
ع
ح
س
ف

مساحة Δ د ح ف = $\frac{1}{2}$ × س ع جا ف

اضغط على المفاتيح:

0.5	×	2.994	
×	2.3	جا	
	68	=	

(أ) طبّق قاعدة جيب الزاوية،

$$\frac{ك ف}{جا\,67^\circ} = \frac{2.3}{جا\,45^\circ}$$

$$ك ف = \frac{2.3 \text{ جا } 67^\circ}{جا\,45^\circ}$$

= 2.994

= 2.99 كم (لأقرب 3 أرقام معنوية)

(ب) ق∠ك ف ح = 180° − 45° − 67° (مجموع زوايا المثلث)

= 68°

∴ مساحة Δ ك ف ح = $\frac{1}{2}$ × ك ف × ح ف × جا∠ك ف ح

= $\frac{1}{2}$ × 2.994 × 2.3 × جا 68°

= 3.192

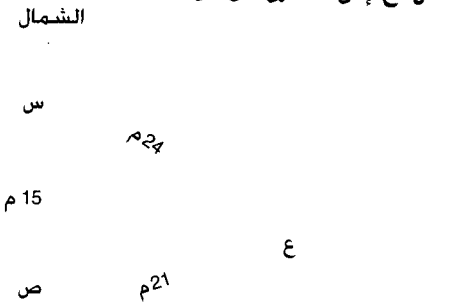
= 3.19 (لأقرب 3 أرقام معنوية)

س ص ع قطعة أرض على شكل مثلث في مستوى أفقي فيها ص تقع إلى الجنوب من النقطة س. فإذا كان س ص = 15 م، ص ع = 21 م، س ع = 24 م.

احسب

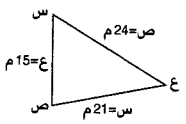
(أ) اتجاه ع من النقطة س.

(ب) المسافة التي تقعها ع إلى الشرق من ص.



ملحوظة

قاعدة جيب التمام للمثلث س ص ع



$$\text{جتا س} = \frac{^2 21 - ^2 15 + ^2 24}{(15)\,(24)\,2}$$

عندما جتا $\theta = \frac{1}{2}$
$\theta = 60°$ بالضبط. ولذلك لا نُقرِّب الزاوية لأقرب رقم عشري ولكن اذكر القيمة الدقيقة لـ $60°$

(أ) اتجاه النقطة ع من النقطة س يعطي بالزاوية ∠ س ع

∴ ∠ ص س ع يجب إيجادها

مستخدمًا قاعدة جيب التمام.

$$\text{جتا} \angle \text{ص س ع} = \frac{^2 21 - ^2 15 + ^2 24}{(15)\,(24)\,2}$$

$$= \frac{441 - 225 + 576}{720}$$

$$= \frac{360}{720}$$

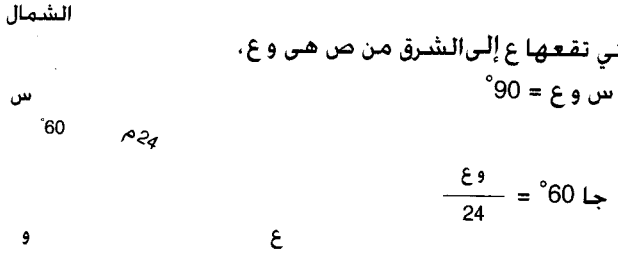
$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{ق} \angle \text{ص س ع} = 60°$$

∴ اتجاه ع من س = $180° - 60°$ (زوايا متجاورة على مستقيم)

$$= 120°$$

(ب) المسافة التي تقعها ع إلى الشرق من ص هي و ع.



حيث ق $\angle$ س و ع $= 90°$

$$\text{جا } 60° = \frac{\text{و ع}}{24}$$

$$\text{و ع} = 24 \text{ جا } 60°$$

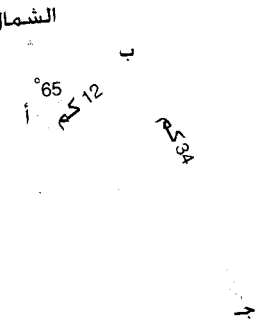
$= 20.8$ م (مقربًا لثلاثة أرقام معنوية)

تمرين 12-2

1- أبحر بحار لمسافة 12كم من أ إلى ب في اتجاه 65° ثم دار بعد ذلك بزاوية 90° وأبحر مسافة 34كم إلى حـ. احسب

(أ) اتجاه حـ من أ،

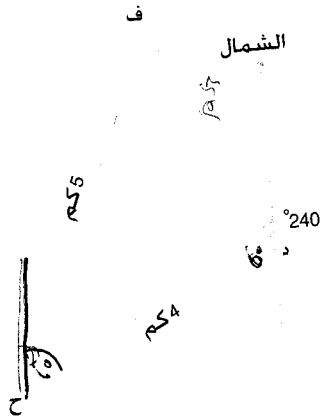
(ب) المسافة أ حـ.



2- انطلقت طائرتان حربيتان من النقطة د بزاوية قياسها 90° بينهما وفي نفس مستوى التحليق. إذا طارت الطائرة الأولى مسافة 4كم في اتجاه 240° من د إلى ح وطارت الطائرة الثانية إلى ف التي تبعد مسافة 5كم من ح. احسب:

(أ) اتجاه ف من ح

(ب) المسافة د ف



3- في Δ ق هـ ن إذا كان ق هـ = 7سم، هـ ن = 6سم، ق∠ ن = 55°. احسب

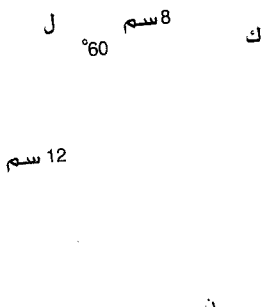
(أ) ق∠ هـ

(ب) مساحة Δ ق هـ ن.

4- ن ك ل م شكل رباعي فيه ق∠ ل م ن = 90°، ق∠ ك = 60°، م ن = 5سم، ل ك = 8سم، ل م = 12سم. احسب

(أ) طول ل ن

(ب) مساحة الشكل الرباعي.



5- سافرت سفينة انقاذ في البحر 20كم من قاعدتها (و) في اتجاه 40° إلى ى. ثم بعد ذلك أبحرت 50كم في اتجاه 300° إلى السفينة الغارقة ط.

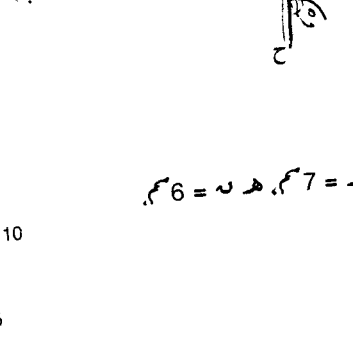
(أ) كم تبعد السفينة الغارقة من القاعدة

(ب) ما اتجاه السفينة الغارقة من القاعدة

6- أخذت قطعة أرض مثلثة الشكل في مستوى أفقي بحيث تقع (ذ) إلى الجنوب من ر. فإذا كان ر ذ = 10م، ذ ت = 14م، ر ت = 16م. احسب.

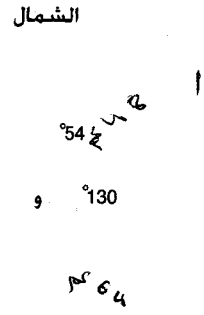
(أ) اتجاه ت من ر،

(ب) المسافة التي تقع فيها ت إلى الغرب من ذ.



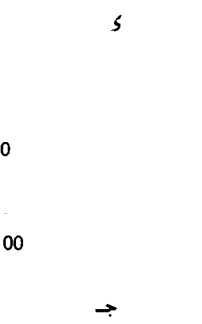
7- سفينتان α، β غادرتا الميناء (و) عند الظهيرة. وأبحرت α بسرعة 12كم / ساعة باتجاه 54° بينما أبحرت β بسرعة 16كم/ ساعة باتجاه 130°.

(أ) في الساعة 4 مساءً كانت السفينة α عند النقطة أ، السفينة β عند النقطة ب.



احسب المسافة أ ب

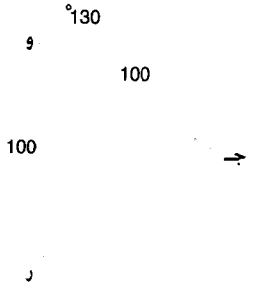
(ب) بعد أن سافرت β مسافة كلية 100كم توقفت عند حـ.



(i) احسب الزمن الذى وصلت فيه β إلى حـ.

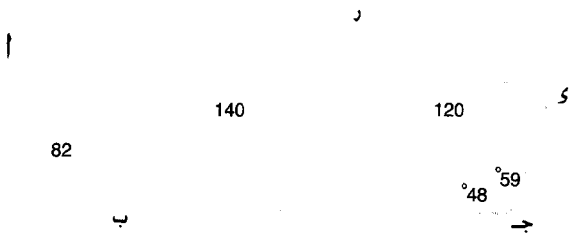
(ii) إذا استمرت السفينة α في سيرها حتى وصلت النقطة د التى تقع إلى الشمال من حـ. احسب المسافة و د.

(جـ) الجزيرة (ر) تقع 100كم جنوب الميناء (و)



احسب اتجاه "ر" من "حـ".

8-



يبين الشكل المرسوم طريقين ب ر، حـ ر في حديقة ا ب حـ ى ر. فإذا كانت ب ر = 140م، حـ ر = 120م، ا ب = 82م، ق∠ ب حـ ر = 48°. ق∠ ى حـ ر = 59°، ق∠ ا ب ر = ∠ حـ ى ر = 90°. احسب

(أ) طول $\overline{حـ ى}$

(ب) ق∠ ا ر ب

(جـ) ق∠ حـ ب ر.

هرم قاعدته مربعة الشكل أ ب حـ ء
طول ضلعها 3.6 سم. أ ح = ب ح = حـ ح = ء ح = 5 سم، نـ نقطة تنصيف $\overline{أء}$. أوجد

(أ) طول $\overline{ح نـ}$

(ب) ارتفاع الهرم

(جـ) قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{أح}$ ، $\overline{أحـ}$

(د) قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{ح نـ}$ ، $\overline{نـ هـ}$

يكون غالبًا من المفيد لمثل هذه المشكلة عمل رسومات منفصلة تبين المثلثات التي سوف تستخدمها في الحسابات

(أ) بما أن المثلث أ ح ء متساوي الساقين فيه
أ ن = ن ء ، فإن ق∠ ح ن أ = 90°
∴ أ نـ = $\frac{1}{2}$ أ ء = 1.8 سم
بتطبيق نظرية فيثاغورث
$ح نـ^2 = أ ح^2 - أ نـ^2$
= 25 - 3.24
= 21.76
ح نـ = $\sqrt{21.76}$
= 4.6648 سم
∴ ح نـ = 4.66 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

(ب) لتكن هـ موقع العمود النازل من ح على أ ب حـ ء.
∴ نـ هـ = $\frac{1}{2}$ حـ ء = 1.8 سم
من (أ) نجد أن ح نـ = $\sqrt{21.76}$ سم
بتطبيق نظرية فيثاغورث
∴ $ح هـ^2 = ح نـ^2 - نـ هـ^2$
= 21.76 - 3.24
= 18.52
∴ ح هـ = 4.303 سم
= 4.30 سم (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

ملحوظة
اضغط على المفاتيح :
جتا	2^{nd} F			
5	+	4.303	(	
			=	)

(جـ) لإيجاد قياس زاوية ح أ هـ المحصورة بين $\overline{أح}$ ، $\overline{أحـ}$
جا ∠ح أ هـ = $\frac{4.303}{5}$
= 0.8607
∴ قياس ∠ح أ هـ = 59.4° (لأقرب رقم عشري واحد)

اضغط على المفاتيح:
جيب	2^{nd} F			
4.6648	+	1.8	(	
			=	)

(د) لإيجاد قياس زاوية ح نـ هـ المحصورة بين $\overline{ح نـ}$ ، $\overline{نـ هـ}$
جتا ∠ح نـ هـ = $\frac{1.8}{4.6648}$
= 0.3859
∴ قياس ∠ح نـ هـ = 67.3° (لأقرب رقم عشري واحد)

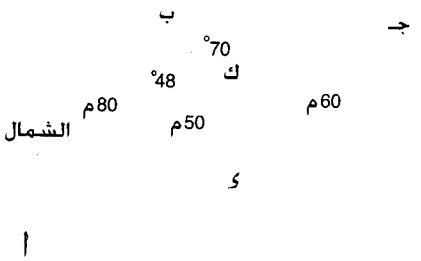
في الرسم أ ب حـ ء قطعة أرض أفقية على صورة شكل رباعي فيه
أ ب = 80م، ب ء = 50م، حـ ء = 60م، ق ∠ أ ب ء = 48°، ق ∠ حـ ب ء = 70° ، حـ تقع في الشرق من ب.

(أ) احسب

(i) اتجاه ب من أ.

(ii) المسافة أ ء

(iii) قياس ∠ب حـ ء



(ب) حلقت الطائرة الورقية عند ك التي تقع رأسيًّا فوق ء فإذا كانت زاوية ارتفاع الطائرة من حـ هي 30°، احسب

(i) ارتفاع الطائرة الورقية فوق ء،

(ii) زاوية الارتفاع للطائرة من ب.

(أ) (i) بفرض وقوع النقطة (ذ) إلى الجنوب من النقطة ب.

∴ ∠حـ ب ذ = 90°

أ ب ذ = 48° + 70° − 90°

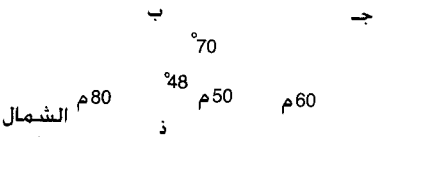
= 28°

∴ اتجاه ب من النقطة أ = مقدار الزاوية ب أ ذ

= 28°.

ملحوظة

يعين الاتجاه دائمًا في ثلاثة أرقام.



(ii) باستخدام قاعدة جيب التمام

أ ء^2 = 50^2 + 80^2 − 2 (50) (80) جتا 48°

= 2 500 + 6 400 − 8 000 جتا 48°

= 8 900 − 8 000 جتا 48°

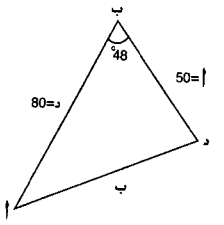
أ ء^2 = 3 546.96

أ ء = $\sqrt{3\,546.96}$

= 59.556

= 59.6م (مقربًا لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

قاعدة جيب التمام للمثلث أ ب د

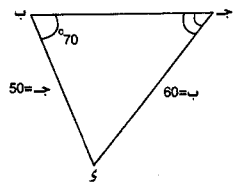


ب^2 = أ^2 + ء^2 − 2أ ء جتا ب

(ii) باستخدام قاعدة الجيب

ملحوظة

قاعدة جيب المثلث ب جـ د



$\frac{\text{جا}(\text{جـ})}{\text{جـ}} = \frac{\text{جا}(\text{ب})}{\text{ب}}$

$\frac{\text{جا}\angle \text{ب ح د}}{50} = \frac{\text{جا}70^\circ}{60}$

$\text{جا}\angle \text{ب ح د} = \frac{50 \text{ جا}70^\circ}{60}$

$\therefore \text{جا}\angle \text{ب ح د} = 0.783\,08$

$\text{ق}\angle \text{ب ح د} = 51.54^\circ$

$= 51.5^\circ$ (لأقرب رقم عشري واحد).

ك

(ب) (i) $\frac{\text{ك د}}{60} = \text{ظا}\,30^\circ$

30° جـ

الارتفاع ك د $= 60 \text{ ظا}\,30^\circ$

60م د

$= 34.641$

$= 34.6$م (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

ك

(ii) $\text{ظا}\angle \text{ك ب د} = \frac{34.641}{50}$ 34.641م

$= 0.692\,82$

ب 50م د

قياس زاوية الارتفاع $\angle \text{ك ب د} = 34.7^\circ$

(لأقرب رقم عشري واحد)

1- في الشكل المرسوم أب جـ د هرم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها 24 سم، وارتفاع الهرم ح هـ = 9 سم، ن نقطة تنصيف $\overline{\text{أ د}}$، أوجد

(أ) طول $\overline{\text{ن هـ}}$

(ب) طول $\overline{\text{ح ن}}$

(جـ) طول $\overline{\text{ح ب}}$

(د) قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{\text{ح ن}}$، $\overline{\text{ن هـ}}$

(هـ) قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{\text{ح ن}}$، $\overline{\text{ب د}}$

ح

ب جـ

9سم

24سم هـ

د ن أ

2- يرتكز ساري أ ب طوله 2م على ركن الحجرة، فإذا كان أ ن = 0.3م، أ م = 0.4م، أوجد

(أ) طول $\overline{\text{أ ح}}$،

(ب) طول $\overline{\text{ب ح}}$،

(جـ) قياس $\angle \text{ب أ ح}$

(د) قياس $\angle \text{ب أ ن}$

ب

2م

جـ

م

ن

0.4م 0.3م

أ

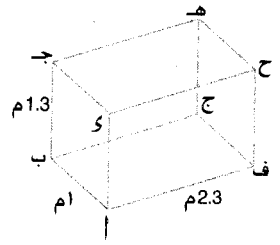
3- في الشكل متوازي مستطيلات عرضه 1م، ارتفاعه 1.3م وطول القاعدة 2.3م احسب:

(أ) طول $\overline{أ ح}$

(ب) طول $\overline{ح ب}$

(جـ) طول $\overline{ب ء}$

(د) قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{ح ب}$، $\overline{ب ف}$.



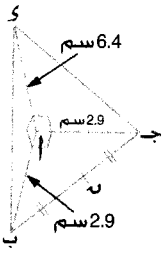
4- أ ب جـ ء هرم قاعدته على شكل مثلث فيه أ ء عمودي على Δ أ ب جـ، ق∠ جـ أ ب = 90° إذا كان أ ء = 6.4سم، أ ب = أ جـ = 2.9سم احسب:

(أ) ق∠ أ ب ء

(ب) طول $\overline{ب جـ}$

(جـ) طول $\overline{ب ء}$

(د) طول $\overline{ء ن}$ عندما $\overline{ب ن}$ = $\overline{ن جـ}$.

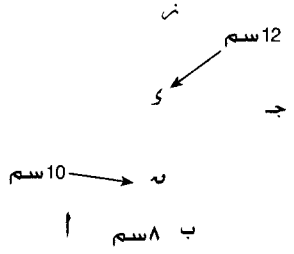


5- في الشكل المرسوم هرم قاعدته على شكل مستطيل أ ب حـ ء رأسه ز. الحروف الجانبية $\overline{ز أ}$، $\overline{ز ب}$، $\overline{ز حـ}$، $\overline{ز ء}$ جميعها متساوية، يتقاطع قطرا القاعدة في النقطة ن فإذا كان أ ب = 8سم، أ حـ = 10سم، $\overline{ز ن}$ = 12سم احسب:

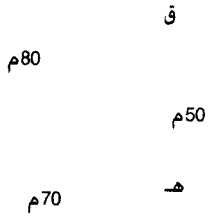
(أ) طول $\overline{ب حـ}$

(ب) طول $\overline{ز حـ}$

(جـ) ظل الزاوية المحصورة بين $\overline{ز ن}$، $\overline{ز حـ}$



6- ق، هـ، أ ثلاث نقط في مستوى أرضي، تقع نقطة هـ جنوب نقطة ق فإذا كان ق هـ = 50م، هـ أ = 70م، ق أ = 80م.



(أ) احسب:

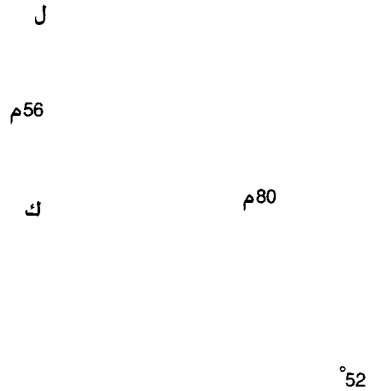
(i) اتجاه أ من ق

(ii) المسافة بين أ، ق هـ

(ب) إذا كان عمود رأسي طوله 21م واقفًا عند أ. احسب أصغر زاويتي الارتفاع من ق، هـ.

7- في الشكل المرسوم أدناه، المستطيل ك ل م ن يمثل تلًّا منحدرًا رأسيًّا، ك ن ب س يمثل جزءًا من سطح البحر الأفقي وكان البحر يقابل التل بطول الخط الأفقي ك ن. قارب عند النقطة ب وصخرة عند النقطة س، س ب ن قطعة مستقيمة أفقية.

ل ك = 56م، ك ن = 80م، ن ب = 50م، ق∠ ك ن س = 60°، ق∠ ك س ن = 52°



(أ) احسب

(i) ك س (ii) ك ب.

(ب) يقف رجل عند ل. احسب قياس زاوية ارتفاعه من ب.

(جـ) يسير رجل بطول قمة التل من ل إلى م، احسب النهاية العظمى لقياس زاوية ارتفاعه من ب أثناء سيره.

ت

-8

ر

12م

106° 40° 32°

ب 7م أ

حـ

ى 15م

أ ، ب، حـ تقع على قطعة مستقيمة واحدة في أرض مستوية . ت هي القمة الرأسية لسارية علم ت حـ.

(أ) أراد عمر إيجاد ارتفاع سارية العلم فقاس زاوية ارتفاع قمة العلم من أ فوجدها 32°، ثم سار بعد ذلك 7 أمتار إلى (ب) وأوجد زاوية الارتفاع فوجدها 40°. احسب

(i) ق∠أ ت ب

(ii) طول $\overline{ب\ ت}$

(iii) الارتفاع ت حـ لسارية العلم.

(ب) على الجانب المقابل من السارية من أ ، ب تنحدر الأرض أسفل إلى ى بحيث ق∠ت حـ ى = 106°، ربط حبلًا من ى التى على بعد 15م من حـ. إلى النقطة ر. بحيث حـ ر =12م، احسب طول الحبل ى ر.

(جـ) أقيمت سارية علم رأسية أخرى (ى ح) عند النقطة ى فإذا كان رح أفقي احسب طول $\overline{ى ح}$.

-9

ى

أ

46م 67°

83 م

14°

جـ ب

في الشكل المرسوم أ ب حـ يمثل حقلًا أفقيًّا على شكل مثلث، أى تمثل شجرة رأسية في ركن من أركان الحقل. رسم مسار حول الحافة ب حـ من الحقل بحيث أ ب = 83م ، أ حـ = 46م، ق∠ب أ حـ = 67°

(أ) فإذا كان قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة عند مشاهدتها من ب هى 14° . احسب ارتفاع الشجرة.

(ب) احسب طول الممر $\overline{ب\ حـ}$.

(جـ) احسب مساحة الحقل أ ب حـ.

(د) احسب أقصر مسافة من أ إلى الممر ب حـ.

(هـ) احسب أكبر قيمة لزاوية الارتفاع لقمة الشجرة عند مشاهدتها من أي نقطة على الممر.

10- وضعت ثلاث علامات أ، ب، حـ لتجهيز مسار لسباق اليخوت فإذا كان أ ب = 800م ، ق∠أ ب حـ =32°، ق∠ب أ حـ = 22°، وكانت ب نقطة على أ ب تبعد مسافة 200م من أ .

هـ

200م 600م

أ ب

22° 32°

(أ) وضح أن المسافة أ جـ هي 524م مقربًا لأقرب متر.

(ب) احسب المسافة ب حـ.

(جـ) طائرة مروحية هـ . حلقت في نقطة رأسيًّا فوق ب

(i) وكان قياس زاوية ارتفاع المروحية من أ هي 12° . احسب ارتفاع الطائرة المروحية.

(ii) إذا كانت ى نقطة على $\overline{أ جـ}$ بحيث تكون أقرب إلى المروحية ، احسب قياس زاوية ارتفاع الطائرة المروحية من د.

-11

شمال ب

ح

21°

82م

173م

جـ أ

ى

يبين الشكل المرسوم أ، ب، حـ، ء أربعة أركان لحقل أفقي مستطيل الشكل أ ب حـ ء. فإذا كان الركن ب على بعد 82م من أ وفي اتجاه 21°. الركن حـ على بعد 173م من أ.

(أ) احسب :

(i) اتجاه حـ من ب

(ii) قياس ∠ب أ حـ

(iii) اتجاه حـ من أ.

(ب) حلق بالون به هواء ساخن عند ح رأسيًّا فوق ج. وكان قياس زاوية ارتفاع قاعدته من ء هي 35°. احسب

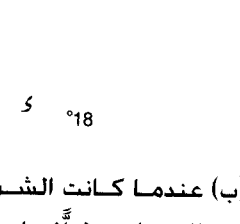
(i) ارتفاع قاعدة البالون فوق حـ .

(ii) قياس زاوية ارتفاع قاعدةالبالون من ب.

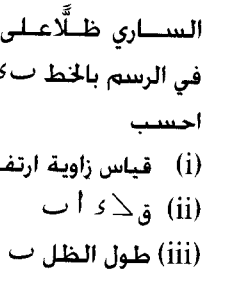
(جـ) يحلق طائر على ارتفاع 40م فوق الحقل. ثم عين فريسةعلى الأرض بزاوية انخفاض قياسها 63°، احسب المسافة التي يتعين على الطائر أن يطيرها لاصطياد الفريسة.

12- في الشكل (1) النقط أ، ب، حـ، ء مراكز أربع كرات كل منها طول نصف قطره 4سم مستقرة على منضدة أفقية فإذا لامست كل كرة اثنتين من الكرات الأخرى بحيث أ حـ ء مربع طول ضلعه 8سم.

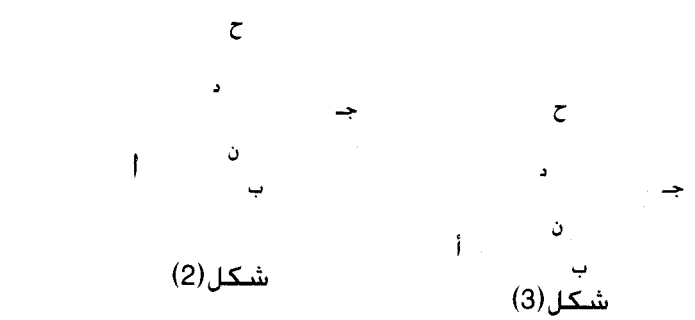
(أ) إذا كانت ن هي نقطة تنصيف أجـ اشرح كون (أ ن)^2 = 32



شكل(1)



شكل(2)



شكل(3)

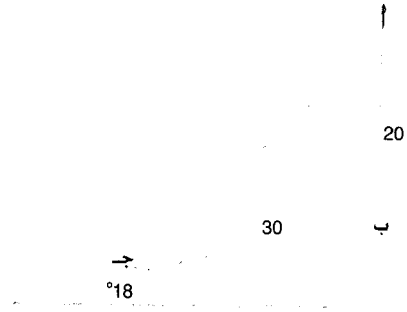
(ب) كرة خامسة مركزها ح، طول نصف قطرها 5سم وضعت فوق قمة الكرات الأربع الأخرى بحيث تلامست معها جميعًا كما هو موضح بالشكل (2) . وكونت مراكز الكرات الخمس هرمًا كما هو موضح في الشكل (3)

(i) اكتب طول أ ح.

(ii) احسب طول ح ب

(iii) احسب ارتفاع (ح) فوق المنضدة.

13-



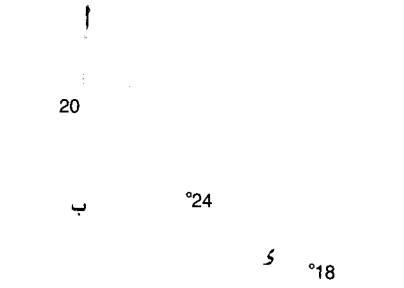
استقر ساري للمذياع أب طوله 20 مترًا فوق قمة منحدر يميل أفقيًّا بزاوية قياسها 18°

(أ) فإذا دُعِّم الساري بسلك أجـ مشدودًا إلى النقطة جـ على المنحدر بحيث

ب جـ = 30مترًا. احسب

(i) ق∠جـ أ ب

(ii) طولالسلك أجـ .



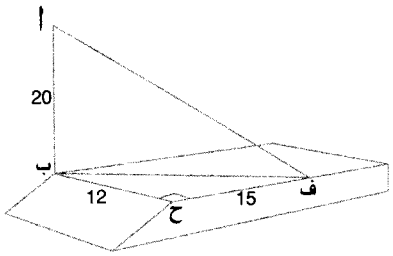
(ب) عندما كانت الشمس في موقع معين. ألقى الساري ظلًّاعلى المنحدر كما هو مبين في الرسم بالخط ب ء فإذا كان قياس ∠أ ء ب =42°، احسب

(i) قياس زاوية ارتفاع الشمس.

(ii) ق∠ء أ ب

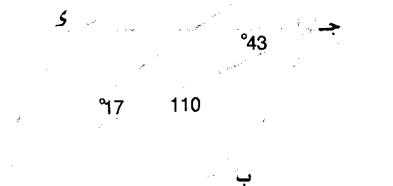
(iii) طول الظل ب ء .

(جـ)



إذا دعِّم السلك بسلك آخر أ ف وكانت النقط ب، ح، ف تقع على أرض أفقية. وكان ق ∠ ب ح ف = 90°، ب ح = 12م، ح ف = 15م، احسب طول السلك أ ف.

14- يبين الشكل الأركان الأربعة أ، ب، حـ، ء لحقل مستطيل الشكل أ ب حـ ء. فإذا كان أ حـ = 110م، ق ∠ ء حـ أ = 43°.



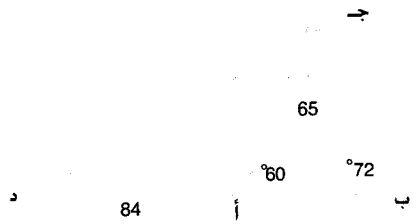
(أ) احسب طول ء حـ

(ب) إذا كانت ت حـ تمثل شجرة رأسية وكان قياس زاوية ارتفاع ت من أ هي 17°، احسب

(i) ارتفاع الشجرة.

(ii) قياس زاوية ارتفاع ت من ء.

15- يبين الشكل التالي حقلين أفقيين مثلثي الشكل أ ب حـ، أ حـ ء أحيطا بسور. فإذا كان ء أ ب قطعة مستقيمة، وكان أ حـ = 65م، ق ∠ حـ أ ب = 60°، ق ∠ أ ب حـ = 72°.



(أ) احسب طول السور ب حـ.

(ب) إذا كان طول السور أ ء يساوي 84م احسب

(i) مساحة الحقل أ حـ ء

طول السور حـ ء.

(جـ) إذا نمت شجرة رأسيًّا عند حـ، وكان قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة من أ هو 14°.

(i) احسب ارتفاع الشجرة.

(ii) إذا تسلق صبي الشجرة حتى منتصف ارتفاعها. احسب قياس زاوية انخفاض ء عند مشاهدتها بواسطة الصبي.

المتباينة

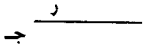
1- عند جمع أو طرح عدد ما من طرفي المتباينة فإن علامة التباين تبقى من دون تغيير.

2- عند ضرب أو قسمة طرفي المتباينة في أو على عدد (موجب) فإن علامة التباين تبقى من دون تغيير.

3- عند ضرب أو قسمة طرفي المتباينة في أو على عدد (سالب) فإن علامة التباين يتم عكسها.

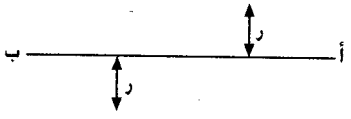
المحل الهندسي

4- المحل الهندسي لنقطة (د) تتحرك بمسافة محددة (ر) وحدة من نقطة معلومة حـ هو الدائرة التي مركزها حـ وطول نصف قطرها (ر) وحدة.

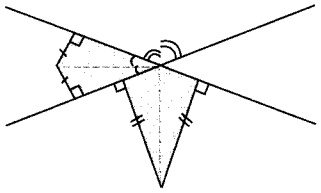


5- المحل الهندسي للنقطة د المتحركة في مسار متساوى الأبعاد من نقطتين معلومتين أ، ب هو العمود المنصف للقطعة أ ب .

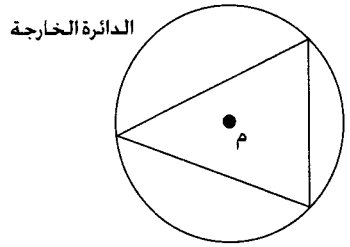
6- المحل الهندسي لنقطة متحركة في مسار على بعد (ر) وحدة من القطعة المستقيمة أ ب هو زوج من المستقيمات المتوازية كل منها على بعد ر وحدة من القطعة أب.



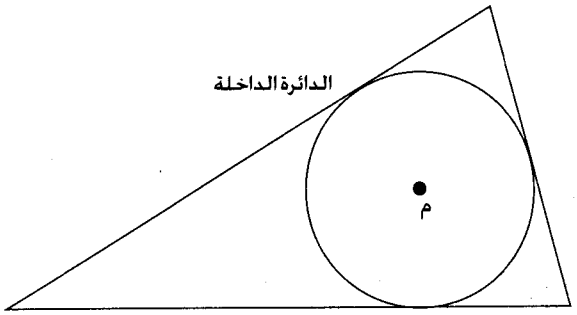
7- المحل الهندسي لنقطة متحركة تبعد بمسافات متساوية من مستقيمين متقاطعين هي زوج القطع المستقيمة التي تنصف الزوايا بين المستقيمين المعلومين.



8- الدائرة التي تمر بالرؤوس الثلاثة لمثلث تسمى الدائرة الخارجة عن المثلث ومركزها يسمى مركز الدائرة الخارجة.



9- الدائرة التي تمس أضلاع المثلث الثلاثة تسمى الدائرة الداخلة للمثلث ومركزها يسمى مركز الدائرة الداخلة.



10- بالنسبة للمتباينات المتضمنة محال هندسية. فإن المنطقة المطلوبة يجب تظليلها.

11- ***حساب المثلثات***

تُحل مسائل حساب المثلثات التي تتضمن ثلاثة أبعاد باستخدام نظرية فيثاغورث والنسب الثلاث لحساب المثلثات (الظل . حا . جتا) وقاعدتي جيب الزاوية وجيب التمام

- المرحلة الرابعة: خط أنابيب من سرت إلى طرابلس، لربط منظومة المرحلة الأولى بمنظومة المرحلة الثانية.
- المرحلة الخامسة: خط أنابيب نقل المياه من أجدابيا إلى طبرق.

رحلة النهر	
1- الكفرة - تازربو 350 كم	2- تازربو - أجدابيا 650 كم
3- السرير - أجدابيا 380 كم	4- أجدابيا - طبرق 400 كم
5- أجدابيا - بنغازي 150 كم	6- أجدابيا - سرت 400 كم
7- سرت - طرابلس 400 كم	8- شرق فزان - طرابلس 650 كم

- ناقش مع زملائك بالفصل أو أصدقائك كيف بدأت مسيرة مشروع النهر الصناعي العظيم. يمكنك فحص شبكة المعلومات الدولية للبحث عن معلومات وثيقة الصلة بهذا الموضوع.

القسم أ

1- حل كل المتباينات الآتية:

(أ) $أ + 1 > 2$ (ب) $ب - 3 > 4$

(جـ) $\frac{جـ}{5} \leq 6$ (د) $7 ، د \geq 8$

2- حل كل المتباينات الآتية:

(أ) $3 م^2 + 2 \leq 5$ (ب) $2 (ه + 2) \geq 3 ه + 1$

(جـ) $\frac{7 س}{2} > 14$ (د) $\frac{ص + 2}{3} < 4$

3- (أ) أوجد جميع قيم س الصحيحة التي تحقق

$3س - 4 > 28 > 4 س - 5$

(ب) أوجد جميع قيم س الصحيحة عندما

$0 > س - 2 > 6 ، 7 > 3س + 2 > 17$

4- إذا كان $-3 \leq م \leq 3$، $2.5 \leq ن \leq 3.5$ احسب:

(أ) القيمة الصغرى لـ $(2م^2 + ن)$

(ب) القيمة العظمى لـ $(ن - 2م^2)$

(جـ) القيمة العظمى لـ $(\frac{2م^2}{ن})$

القسم ب

5- إذا كانت س عددًا صحيحًا وكان $-\frac{1}{3} 18 > س \geq 18$، اكتب

(أ) القيمة الصغرى لـ س

(ب) القيمة العظمى لـ س بحيث أن س عدد أولي.

(جـ) القيمة العظمى لـ س بحيث أن س مربع كامل.

6- إذا كان $-25 < س < 25\frac{1}{2}$، أوجد

(أ) أكبر قيمة صحيحة لـ س .

(ب) أكبر قيمة ممكنة لـ س حيث س عددًا نسبيًّا.

(جـ) قيمتين صحيحتين لـ (س) بحيث يمكن قسمتهما على 5، -3 دون باقٍ.

7- ارسم على نفس الشكل

(أ) المثلث أ ب حـ بحيث أن أ ب = 7سم، ب حـ = 6سم، أ حـ = 5سم.

(ب) الدائرة التي تمس الأضلاع الثلاثة للمثلث.

8- على نفس الرسم:

(أ) ارسم المثلث ى ط ر الذي فيه ى ط = 7 سم
∠ر ى ط = 80° ، ∠ ى ط ر = 60°

(ب) ارسم المحل الهندسي للنقط التي

(i) تبعد مسافات متساوية من ى ، ر

(ii) تبعد مسافات متساوية من ط، ر

حدد النقطة و التي تقع على مسافة متساوية من ى، ط، ر، ثم ارسم الدائرة التي تمر بالنقط ى، ط، ر.

(جـ) ارسم على نفس الجانب من ى ط مثل ر المحل الهندسي للنقطة ص بحيث أن مساحة المثلث ى ط ص = $\frac{1}{2}$ مساحة المثلث ى ط ر.

القسم جـ

9- (أ) ارسم بدقة المعين أ ب حـ ى الذي فيه أ ب = 6 سم، ∠ ب أ ى = 60°. قس واكتب طول ب ى.

(ب) على نفس الرسم

(i) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافات متساوية من أ ب، أ ى.

(ii) ارسم المحل الهندسي للنقطة د التي تقع داخل المعين بحيث أن ى تقع على مسافة ثابتة 3 سم من م التي تنصف أ ب.

(iii) ارسم المحل الهندسي للنقط التي تقع داخل المعين بحيث تكون على بعد 3 سم من ب.

(جـ) ظلل وعنون المنطقة (ر) التي يجب أن تقع النقطة ر فيها إذا كان:

∠ ر أ ب ≥ ∠ ر أ ى

م ر ≤ 3 سم

ب ر ≥ 3 سم

10- تمثل (و) في الرسم قاعدة برج رأسي و ت، النقط و، أ، ب، حـ تكون على أرض أفقية حيث أ$\hat{}$ ب = 60°، ب$\hat{}$ حـ و = 80°، و أ = 70 م، و ب = 100 م، ب حـ = 90 م. إذا كانت زاوية ارتفاع ت من أ = 30°، احسب.

(أ) ارتفاع البرج

(ب) زاوية الانخفاض ب من ت

(جـ) طول أ ب

(د) زاوية ب و حـ